

[Lire la première partie de la thèse](#)

6 | Utilisation des variances filtrées dans le 3D-Var d'AROME

La méthode de filtrage des variances d'erreur d'ébauche développée dans la section 4.1 ayant confirmé son efficacité pour le modèle AROME dans le chapitre 5, on cherche dans ce chapitre à étudier l'impact de l'utilisation de ces variances filtrées dans le 3D-Var AROME. On examine d'abord l'effet des variances hétérogènes sur les fonctions locales de covariance modélisée, y compris par comparaison avec les covariances estimées avec un grand ensemble. On évalue ensuite l'impact de l'utilisation des variances du jour, homogènes ou hétérogènes, sur le spin-up, sur les incréments d'analyse et sur les scores de prévision.

Sommaire

6.1	Diagnostic des covariances d'erreur d'ébauche modélisées	123
6.1.1	Cadre expérimental	123
6.1.2	Grandeurs diagnostiquées	125
6.1.3	Détail des covariances modélisées	127
6.1.4	Dépendance à l'écoulement	133
6.1.5	Conclusions	134
6.2	Test d'impact sur une longue période	135
6.2.1	Caractéristiques des simulations	135
6.2.2	Filtrage des variances du jour	136
6.2.3	Utilisation des variances filtrées	141
6.3	Conclusions	152

6.1. Diagnostic des covariances d'erreur d'ébauche modélisées

L'objectif de cette section est d'illustrer l'impact de l'introduction dans les autocovariances d'AROME de variances échantillonnées par un ensemble, potentiellement moyennées ou filtrées, et d'en évaluer la pertinence en comparant les covariances ainsi modélisées à des covariances échantillonnées par un grand ensemble. Les variances sont insérées dans la matrice \mathbf{B} d'AROME de façon analogue à ARPEGE : l'écart-type moyen Σ_i de l'équation 2.5 est remplacé par la matrice diagonale $\mathbf{V}_i^{1/2}$, dont les coefficients diagonaux correspondent à la racine carrée des éléments du vecteur \mathbf{v} des chapitres précédents.

6.1.1. Cadre expérimental

Configurations testées

On se base sur l'ensemble de 90 membres AEARO décrit au chapitre 2 pour estimer des variances d'erreur d'ébauche des variables non balancées. Ces variances sont introduites dans la matrice \mathbf{B} d'AROME, dans plusieurs configurations résumées dans le tableau 6.1. Pour l'ensemble de grande taille (84 membres), les variances sont laissées brutes, car l'amplitude du bruit d'échantillonnage est suffisamment faible (cf. section 5.1.2). Pour le petit ensemble (6 membres), les variances sont soit brutes, soit filtrées par le filtre optimal utilisé dans le chapitre précédent, soit moyennées horizontalement. Afin de limiter la propagation horizontale excessive des covariances modélisées, parfois observée dans la suite, on utilise dans une

dernière configuration une version particulière de l’opérateur \mathcal{H} (cf. section 2.1.2). Tandis que la régression spectrale reste inchangée, un masque est appliqué dans l’espace physique pour rendre l’opérateur à support compact (Guidard, 2007). Cela suppose l’introduction d’un paramètre arbitraire, contrôlant la taille du support, et fixé ici à 150 km. Dans cette configuration, on utilise les variances filtrées tirées du petit ensemble.

Table 6.1. – Configurations de variances testées avec l’ensemble du chapitre 2.

Configuration	Taille de l’ensemble	Filtrage spatial
“Averaged var.”	6	Moyenne horizontale
“Raw var. (84)”	84	Non
“Raw var. (6)”	6	Non
“Filtered var. (6)”	6	Filtrage horizontal
“Filtered var.-CoSu (6)”	6	Filtrage horizontal Opérateur \mathcal{H} à support compact

Écarts-types

Les coupes verticales des écarts-types d’erreur d’ébauche sont données par la figure 6.1, le long de la latitude 44.5°N pour les prévisions à 3 h d’échéance émises le 3 novembre 2011 à 18 h UTC (cf. cartes de la figure 5.5, colonne de gauche). On rappelle que pour ce cas, une ligne de fortes précipitations convectives traversait la France du nord au sud (cf. figure 2.8). La présence de ces précipitations explique la plus grande incertitude vers 3°E pour toutes les variables, et de façon particulièrement prononcée pour ζ et η_u . Le bruit d’échantillonnage est très net pour les variances non filtrées calculées à partir de 6 membres, et s’atténue grandement grâce au filtrage spatial. Ce dernier permet de conserver les structures de grande échelle des variances de référence (calculées à partir de 84 membres) mais lisse les structures de fine échelle. Enfin, l’utilisation d’un opérateur \mathcal{H} à support compact laisse les variances de vorticit   inchangés (\mathcal{H} n’intervenant pas), modifie tr  s l  g  rement celles de divergence non balancé, et change plus significativement les variances de temp  rature non balancé et d’humidit   sp  cifique non balancé.

Les deux croix noires indiquent la position des points d’observation fictifs, qui vont permettre de d  tailler les covariances modélisés dans la suite.    l’est, il s’agit d’une zone convective intense, o   les variances sont plus élevés que la moyenne horizontale.    l’ouest, il s’agit d’une zone plus calme, o   les variances sont plut  t moins élevés que la moyenne horizontale.

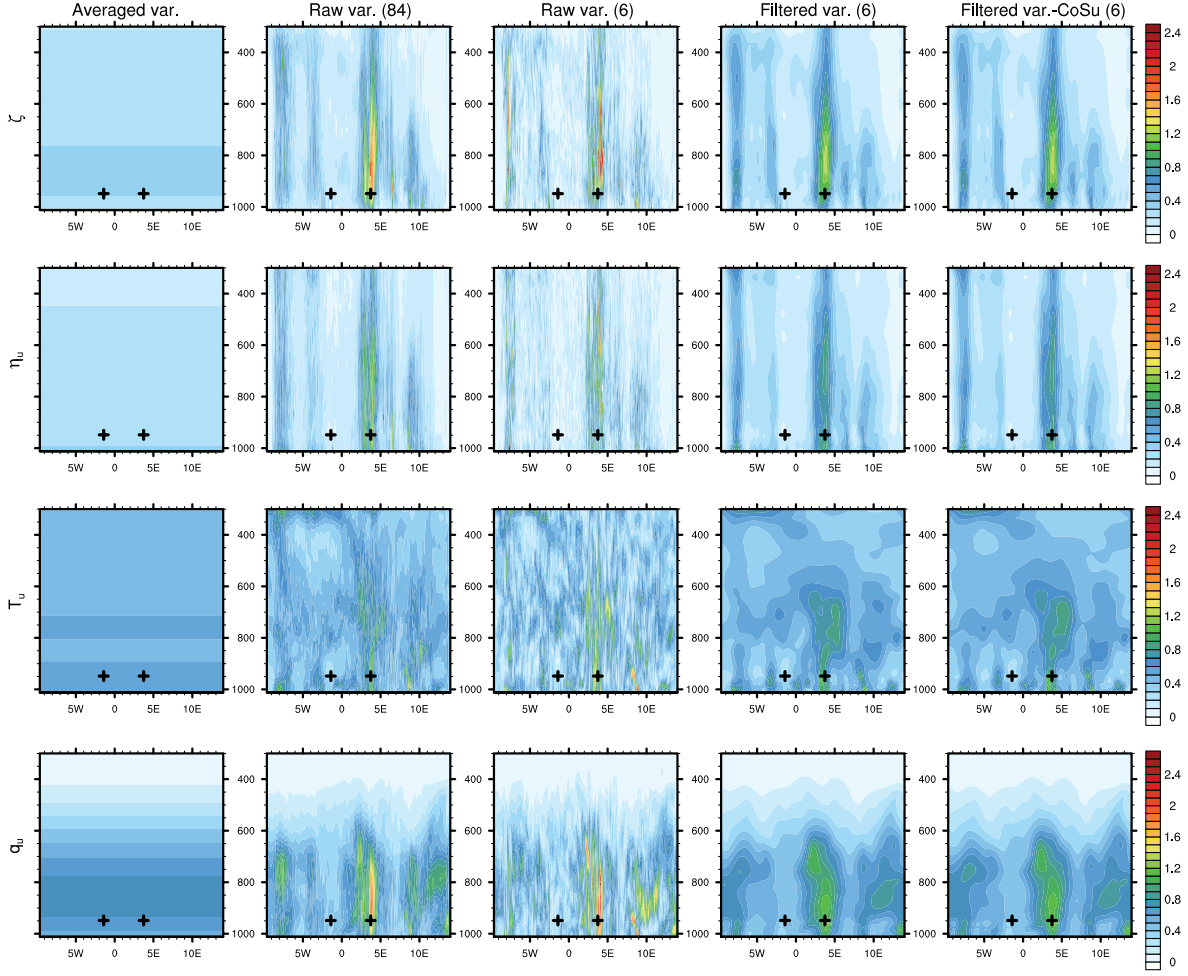


Figure 6.1. — Ecart-types déduits des variances calculées dans différentes configurations (de gauche à droite, voir table 6.1), pour la vorticité, la divergence non balancée, la température non balancée et l’humidité spécifique non balancée (de haut en bas). Les prévisions à 3 h d’échéance sont émises le 3 novembre à 18 h UTC (unités respectives : 10^{-3}s^{-1} , 10^{-3}s^{-1} , K, g.kg^{-1}).

6.1.2. Grandeurs diagnostiquées

Expériences à une observation

On souhaite étudier les structures des covariances d’erreur d’ébauche modélisées dans la matrice $\bar{\mathbf{B}}$. Afin de déterminer les covariances avec l’élément d’indice J du vecteur d’état \mathbf{x} , il suffit d’appliquer $\bar{\mathbf{B}}$ à un vecteur $\boldsymbol{\delta}$ dont le $J^{\text{ème}}$ élément vaut 1 et tous les autres sont nuls. La $J^{\text{ème}}$ colonne $\bar{\mathbf{b}}$ de $\bar{\mathbf{B}}$ est alors donnée par :

$$\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{B}}\boldsymbol{\delta} \quad (6.1)$$

En pratique, seule $\bar{\mathbf{B}}^{1/2}$ est implémentée dans le système d’assimilation, et il faut donc appliquer successivement $\bar{\mathbf{B}}^{T/2}$ puis $\bar{\mathbf{B}}^{1/2}$ à $\boldsymbol{\delta}$.

Dans le cadre du BLUE (équation 1.10), si une seule observation est assimilée, il est pos-

sible de relier $\bar{\mathbf{b}}$ à l'incrément d'analyse $\delta \mathbf{x}^a$, dont on rappelle ici l'expression :

$$\delta \mathbf{x}^a = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{H}^T + \bar{\mathbf{R}})^{-1} (\mathbf{y}^o - \mathbf{H} \mathbf{x}^b) \quad (6.2)$$

où les opérateurs \mathbf{B} et \mathbf{R} de l'équation 1.10 sont maintenant modélisés respectivement par $\bar{\mathbf{B}}$ et $\bar{\mathbf{R}}$. Si l'on impose un vecteur d'observation \mathbf{y}^o constituée d'une unique observation y^o , correspondant à l'élément d'indice J du vecteur d'état \mathbf{x} , l'opérateur \mathbf{H} se réduit à :

$$\mathbf{H} = \boldsymbol{\delta}^T \quad (6.3)$$

Si on définit le vecteur $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^b$ rassemblant les racines carrées des éléments diagonaux de $\bar{\mathbf{B}}$, la matrice $\mathbf{H} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{H}^T$ est réduite à l'élément $(\bar{\sigma}_J^b)^2$. La matrice $\bar{\mathbf{R}}$ est scalaire elle aussi et vaut $\bar{\mathbf{R}} = (\bar{\sigma}^o)^2$. On obtient alors :

$$\delta \mathbf{x}^a = \frac{d}{(\bar{\sigma}_J^b)^2 + (\bar{\sigma}^o)^2} \bar{\mathbf{b}} \quad (6.4)$$

où d est l'innovation, scalaire également. On peut décomposer $\bar{\mathbf{b}}$ en :

$$\bar{\mathbf{b}} = \bar{\sigma}_J^b \bar{\boldsymbol{\sigma}}^b \circ \bar{\mathbf{c}} \quad (6.5)$$

où $\bar{\mathbf{c}}$ est le vecteur des corrélations modélisées avec l'élément d'indice J et \circ indique un produit de Schur (élément par élément).

Dans la suite de cette section, seules les covariances normalisées $\bar{\mathbf{b}}/\bar{\sigma}_J^b$ sont tracées pour obtenir le produit $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^b \circ \bar{\mathbf{c}}$, sans interférence supplémentaire de $\bar{\sigma}_J^b$. Les champs tracés ont donc la dimension physique de la partie de la variable d'état correspondante.

Cas du 3D-Var AROME

Dans le 3D-Var du modèle AROME, la matrice $\bar{\mathbf{B}}$ est modélisée selon la méthode de Derber et Bouttier (1999), détaillée dans la section 2.1.2. Elle peut être représentée en blocs de covariances suivant les variables du vecteur d'état :

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{B}}(\zeta, \zeta) & \bar{\mathbf{B}}(\zeta, \eta) & \bar{\mathbf{B}}(\zeta, T) & \bar{\mathbf{B}}(\zeta, q) \\ \bar{\mathbf{B}}(\eta, \zeta) & \bar{\mathbf{B}}(\eta, \eta) & \bar{\mathbf{B}}(\eta, T) & \bar{\mathbf{B}}(\eta, q) \\ \bar{\mathbf{B}}(T, \zeta) & \bar{\mathbf{B}}(T, \eta) & \bar{\mathbf{B}}(T, T) & \bar{\mathbf{B}}(T, q) \\ \bar{\mathbf{B}}(q, \zeta) & \bar{\mathbf{B}}(q, \eta) & \bar{\mathbf{B}}(q, T) & \bar{\mathbf{B}}(q, q) \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

Les blocs diagonaux, correspondant aux autocovariances, sont décomposés en :

$$\bar{\mathbf{B}}(\zeta, \zeta) = \bar{\mathbf{B}}_{s, \zeta} \quad (6.7a)$$

$$\bar{\mathbf{B}}(\eta, \eta) = \mathcal{M} \mathcal{H} \bar{\mathbf{B}}_{s, \zeta} (\mathcal{M} \mathcal{H})^T + \bar{\mathbf{B}}_{s, \eta_u} \quad (6.7b)$$

$$\bar{\mathbf{B}}(T, T) = \mathcal{N} \mathcal{H} \bar{\mathbf{B}}_{s, \zeta} (\mathcal{N} \mathcal{H})^T + \mathcal{P} \bar{\mathbf{B}}_{s, \eta_u} \mathcal{P}^T + \bar{\mathbf{B}}_{s, T_u} \quad (6.7c)$$

$$\bar{\mathbf{B}}(q, q) = \mathcal{Q} \mathcal{H} \bar{\mathbf{B}}_{s, \zeta} (\mathcal{Q} \mathcal{H})^T + \mathcal{R} \bar{\mathbf{B}}_{s, \eta_u} \mathcal{R}^T + \mathcal{S} \bar{\mathbf{B}}_{s, T_u} \mathcal{S}^T + \bar{\mathbf{B}}_{s, q_u} \quad (6.7d)$$

Les matrices $\bar{\mathbf{B}}_{s, \alpha_u}$ correspondent aux matrices d'autocovariance de la partie non balancée de la variable α . Dans la suite, on s'intéressera également au bloc non diagonal $\bar{\mathbf{B}}(q, T)$, donnant la covariance entre la température et l'humidité spécifique :

$$\bar{\mathbf{B}}(q, T) = \mathcal{Q} \mathcal{H} \bar{\mathbf{B}}_{s, \zeta} (\mathcal{N} \mathcal{H})^T + \mathcal{R} \bar{\mathbf{B}}_{s, \eta_u} \mathcal{P}^T + \mathcal{S} \bar{\mathbf{B}}_{s, T_u} \quad (6.8)$$

Il faut noter que lorsque l'on trace les différents termes impliqués dans une covariance de ce type, la normalisation $\bar{\mathbf{B}}/\bar{\sigma}_J^b$ se fait en divisant par l'élément $\bar{\sigma}_J^b$ de la covariance totale, et non par celui de chaque terme individuel. Ainsi, la somme des termes normalisés reste égale à la covariance totale normalisée.

6.1.3. Détail des covariances modélisées

Autocovariance de vorticité

Comme le suggèrent respectivement les figures 2 de Montmerle et Berre (2010) et 5 de Brousseau *et al.* (2011), l'autocovariance de vorticité $\bar{\mathbf{B}}_{s,\zeta}$ a une portée horizontale très courte. Cependant, sa portée verticale est assez proche de celle des autres variables, ce que l'on retrouve dans la figure 6.2. On constate que ses maxima sont cohérents avec les valeurs de la figure 6.1 :

- Le point d'observation à l'est se trouve dans une zone de très forte variance pour les variances brutes à 84 membres. Pour les variances brutes à 6 membres, il se trouve juste à côté, d'où l'écart significatif.
- Au point d'observation à l'ouest, les maxima de $\bar{\mathbf{B}}_{s,\zeta}$ sont plus faibles dans les cas où les variances sont hétérogènes spatialement que dans le cas où elles sont moyennées. On constate aussi la présence de maxima locaux de covariance à grande séparation, dans les zones où les variances sont très fortes (en particulier pour les variances brutes à 6 membres). Même si la corrélation à cette séparation est faible, elle est compensée par un écart-type très fort, jusqu'à 34 fois supérieur à l'écart-type au point d'observation pour les variances brutes à 6 membres ($2,68.10^{-3} \text{ s}^{-1}$ au maximum contre $7,82.10^{-5} \text{ s}^{-1}$ au point d'observation).

L'opérateur \mathcal{H} n'intervient pas ici, ce qui explique que les configurations “Filtered var.” et “Filtered var.-CoSu” donnent des résultats identiques.

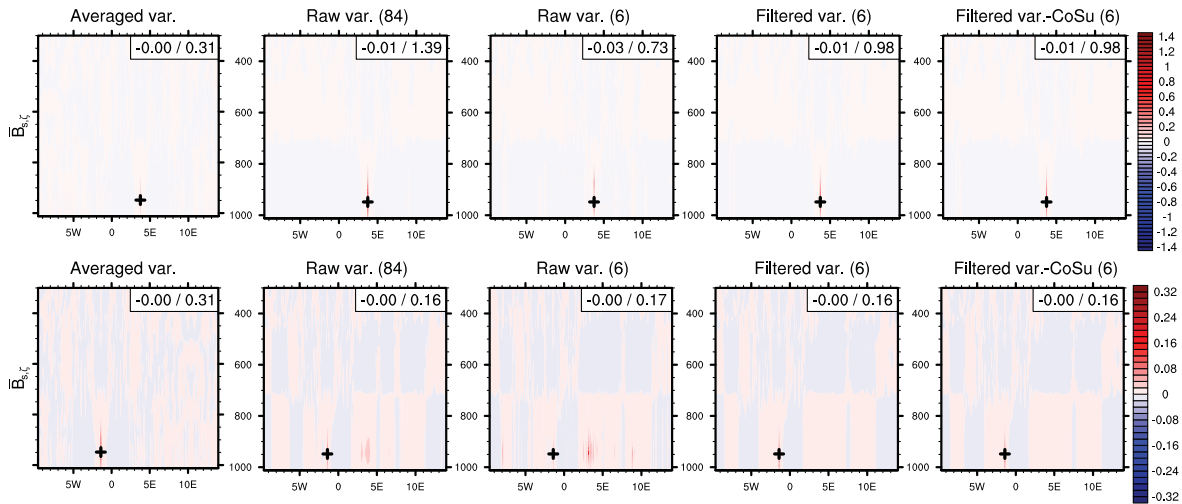


Figure 6.2. — Autocovariance normalisée de vorticité (unité : 10^{-3} s^{-1}), et ses extrema.

Autocovariance de masse totale linéarisée

Comme le montre la figure 6.3, l'autocovariance de la masse totale linéarisée $\mathcal{H}\bar{\mathbf{B}}_{s,\zeta}\mathcal{H}^T$ a des portées horizontales considérablement plus longues que celles de $\bar{\mathbf{B}}_{s,\zeta}$ seule. Ceci est dû à la

nature de l'opérateur \mathcal{H} , explicitée dans l'équation 2.3 : si l'on néglige les variations en latitude du paramètre de Coriolis ($f \simeq f_0$), le champ de masse en équilibre géostrophique est donné par :

$$\delta P_t \simeq f_0 \nabla^{-2} \delta \zeta \quad (6.9)$$

Or l'application du Laplacien inverse ∇^{-2} correspond à une double intégration spatiale, ce qui favorise les grandes échelles au détriment des petites.

En comparant les configurations “Filtered var.” et “Filtered var.-CoSu” pour le point d'observation à l'est, l'impact de la restriction de \mathcal{H} à un support compact est net. Comme attendu, l'extension horizontale de $\mathcal{H}\bar{\mathbf{B}}_{s,\zeta}\mathcal{H}^T$ est très réduite, tandis que son amplitude à l'endroit de l'observation n'est quasiment pas modifiée.

Pour le point d'observation à l'ouest, les variances hétérogènes introduisent des maxima locaux de $\bar{\mathbf{B}}_{s,\zeta}$, notés au paragraphe précédent. Ceci change radicalement la structure de $\mathcal{H}\bar{\mathbf{B}}_{s,\zeta}\mathcal{H}^T$, avec l'apparition d'un maximum local très important à l'endroit de ce maximum de variance, à grande distance du point d'observation. Ce maximum local devient même le maximum global pour les variances brutes à 84 et 6 membres. L'application du support compact pour \mathcal{H} réduit fortement l'amplitude des covariances, en particulier celle du maximum secondaire.

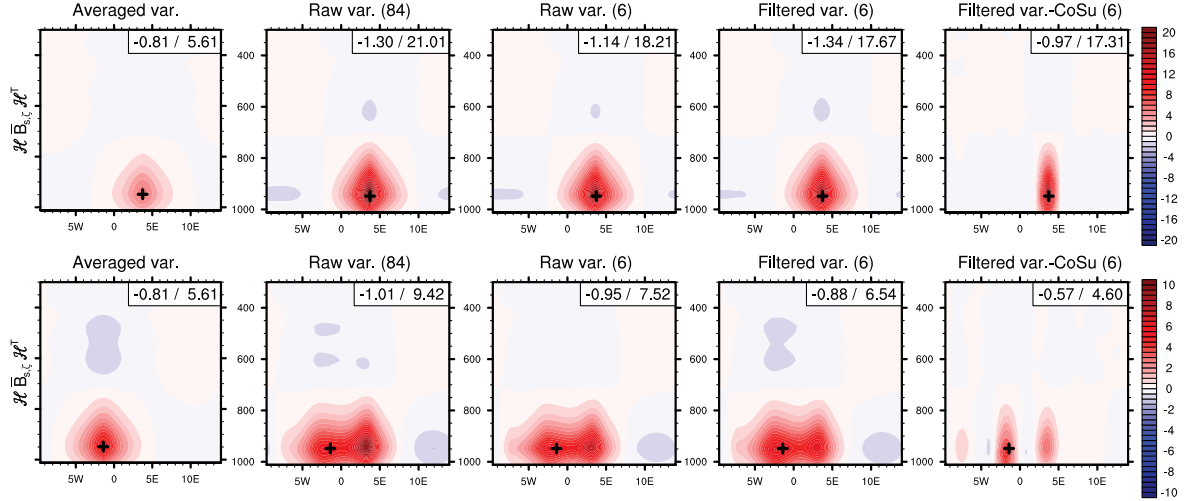


Figure 6.3. — Autocovariance normalisée de masse totale linéarisée (unité : $\text{m}^2.\text{s}^{-2}$), et ses extrema.

Dans la suite de cette section, seules les covariances modélisées au point d'observation à l'ouest sont montrées, car ce sont elles qui expriment le mieux l'effet des variances hétérogènes.

Autocovariance de divergence

De même que pour la vorticité, les écarts-types de divergence non balancée présentent des variations très importantes pour les variances brutes (figure 6.1). Pour les mêmes raisons, on retrouve donc des minima et maxima importants à grande séparation dans $\bar{\mathbf{B}}_{s,\eta_u}$, comme on peut le constater sur la figure 6.4. On remarque aussi que la structure horizontale de $\bar{\mathbf{B}}_{s,\eta_u}$ est proche de celle de $\bar{\mathbf{B}}_{s,\zeta}$, avec des port es très courtes. Cependant, sa structure verticale est différente : elle présente un lobe négatif situé au-dessus du point d'observation. Ceci correspond physiquement au fait que la divergence est à peu près conserv e au sein d'une colonne atmosphérique donn e : toute convergence doit être compens e par une divergence.

Le poids relatif des différentes composantes de l'autocovariance de divergence (équation 6.7b) varie clairement d'une configuration à l'autre. Le poids de la composante multivariée $\mathcal{MH}\bar{\mathbf{B}}_{s,\zeta}(\mathcal{MH})^T$ liée à la vorticité est ainsi très faible dans le cas de variances homogènes (inférieur ici à 4 %), et reste assez faible pour des variances hétérogènes filtrées ($\sim 10\%$). Pour des variances hétérogènes brutes, ce poids augmente sensiblement. Ceci rappelle le comportement de $\mathcal{H}\bar{\mathbf{B}}_{s,\zeta}\mathcal{H}^T$, dont l'amplitude suivait la même tendance.

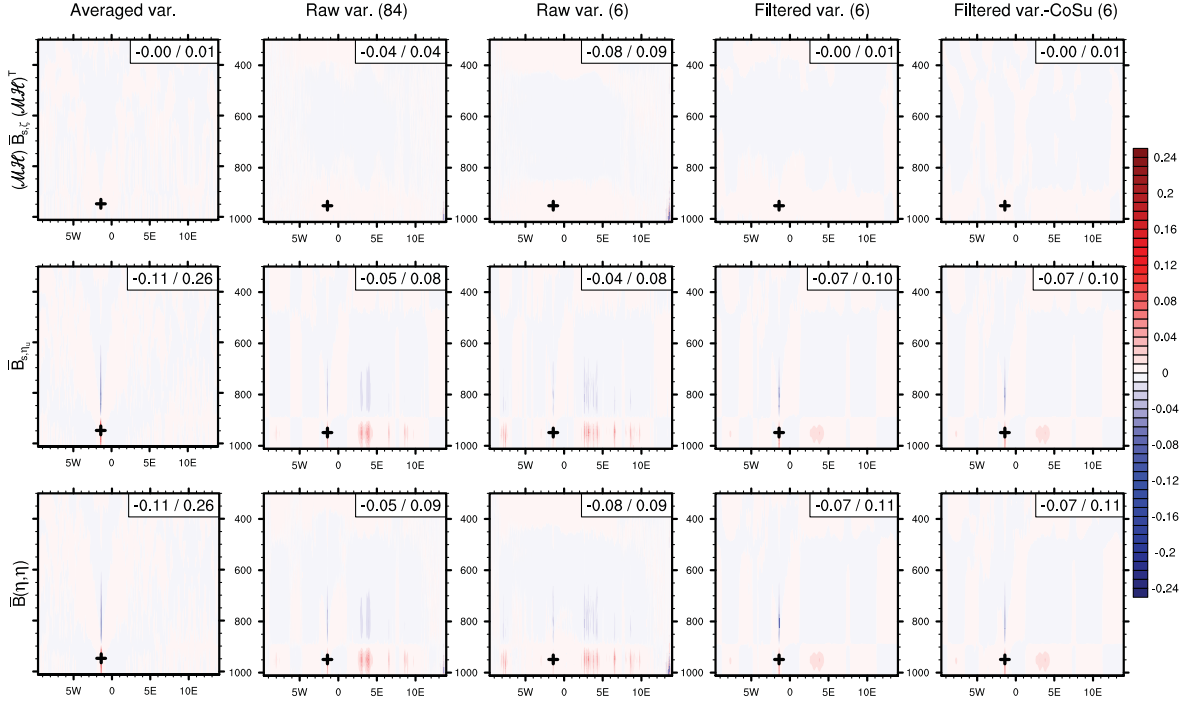


Figure 6.4. — Autocovariance normalisée de divergence et ses composantes (unité : 10^{-3} s^{-1}), ainsi que leurs extrema.

Autocovariance implicite de vent méridien

À partir des autocovariances modélisées de vorticité et de divergence, il est possible de déduire les autocovariances implicites de vents zonal et méridien. La figure 6.5 montre que l'hétérogénéité des variances spécifiées se manifeste par une augmentation de la composante multivariée de l'autocovariance de vent méridien, d'autant plus forte que les variances sont hétérogènes. Dans le cas des variances brutes à 6 membres, ce terme à une amplitude plus de 15 fois plus importante que dans le cas des variances homogènes ($1,26 \text{ m.s}^{-1}$ contre $0,08 \text{ m.s}^{-1}$), des structures de forte amplitude se propageant en altitude, probablement en raison des corrélations verticales spectrales de l'opérateur \mathcal{M} . L'apport du filtrage des variances est décisif, car il permet de diminuer largement ces effets (rapport des amplitudes réduit à $2,75 : 0,22 \text{ m.s}^{-1}$ contre $0,08 \text{ m.s}^{-1}$). La composante multivariée reste dans tous les cas dominée par la composante univariée. Cette dernière subit également une modification de sa structure spatiale, avec une propagation vers l'est du lobe positif, suivi d'une forte diminution et d'un lobe négatif au passage de la zone de fortes variances. L'hétérogénéité des variances spécifiées a donc tendance dans ce cas à allonger de façon significative la portée des covariances modélisées de vent méridien.

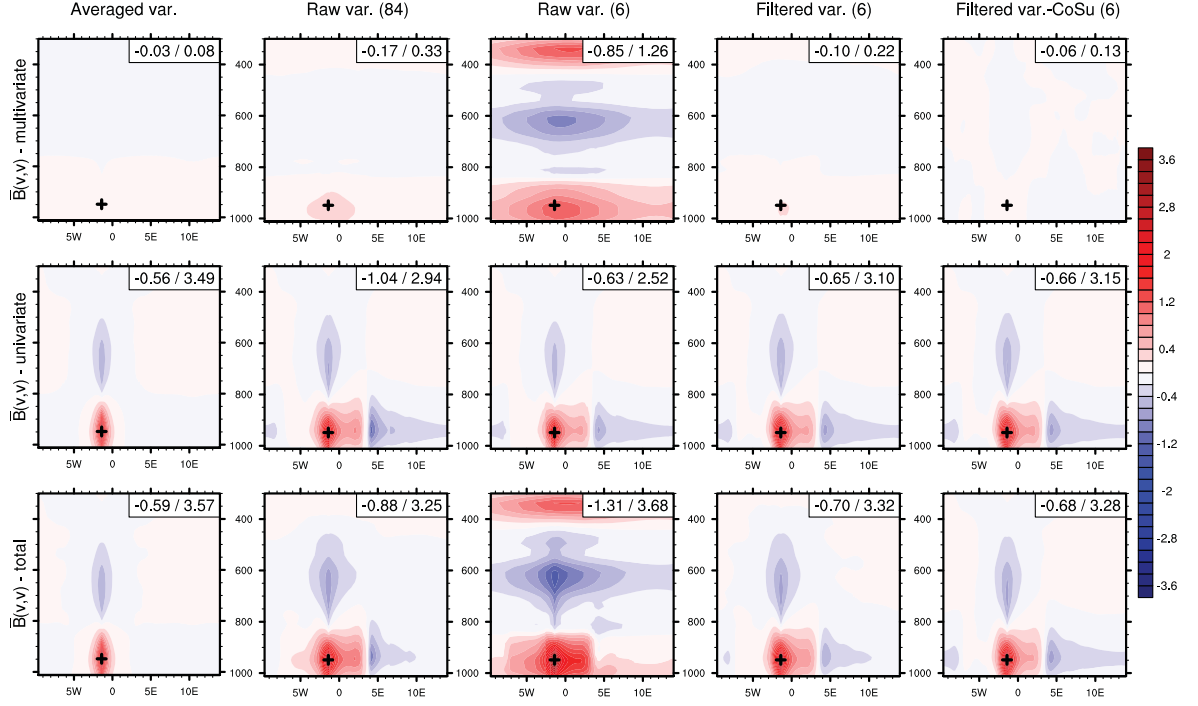


Figure 6.5. — Autocovariance normalisée de vent méridien : composante multivariée, composante univariée, autocovariance totale (unité : m.s^{-1}), ainsi que leurs extrema.

Autocovariance de température

La figure 6.6 donne les différentes composantes de l'autocovariance de température $\bar{\mathbf{B}}(T, T)$, rappelées dans l'équation 6.7c. Les changements de structure des covariances modélisées de vorticité et de divergence non balancée dus aux variances sp cifi es ont un impact très important sur les composantes multivari es de $\bar{\mathbf{B}}(T, T)$. Ils en modifient fortement la structure et augmentent leur amplitude, même si les variances des variables non balancées sont localement faibles. Le problème se pose donc pour le terme $\mathcal{NH}\bar{\mathbf{B}}_{s,\zeta}(\mathcal{NH})^T$ et pour dans une moindre mesure pour le terme $\mathcal{P}\bar{\mathbf{B}}_{s,\eta_u}\mathcal{P}^T$, car le couplage de la température avec la divergence non balancée est plus faible que celui avec la masse totale lin aris e. On note que les poids relatifs des composantes multivari es ($\mathcal{NH}\bar{\mathbf{B}}_{s,\zeta}(\mathcal{NH})^T + \mathcal{P}\bar{\mathbf{B}}_{s,\eta_u}\mathcal{P}^T$) et univari es ($\bar{\mathbf{B}}_{s,T_u}$) dans $\bar{\mathbf{B}}(T, T)$ sont modifiés selon les variances sp cifi es. L'utilisation des variances hétérogènes semble augmenter systématiquement le poids des composantes multivari es, qui dominent l'autocovariance totale dans les cas les plus bruités.

Comme précédemment, ce problème est particulièrement marqué pour les variances brutes à 6 membres, et semble s'atténuer nettement avec le filtrage des variances, dont le résultat se rapproche toujours fortement de la référence à 84 membres. L'impact du support compact pour l'opérateur \mathcal{H} est très net, limitant la propagation des structures de $\mathcal{NH}\bar{\mathbf{B}}_{s,\zeta}(\mathcal{NH})^T$.

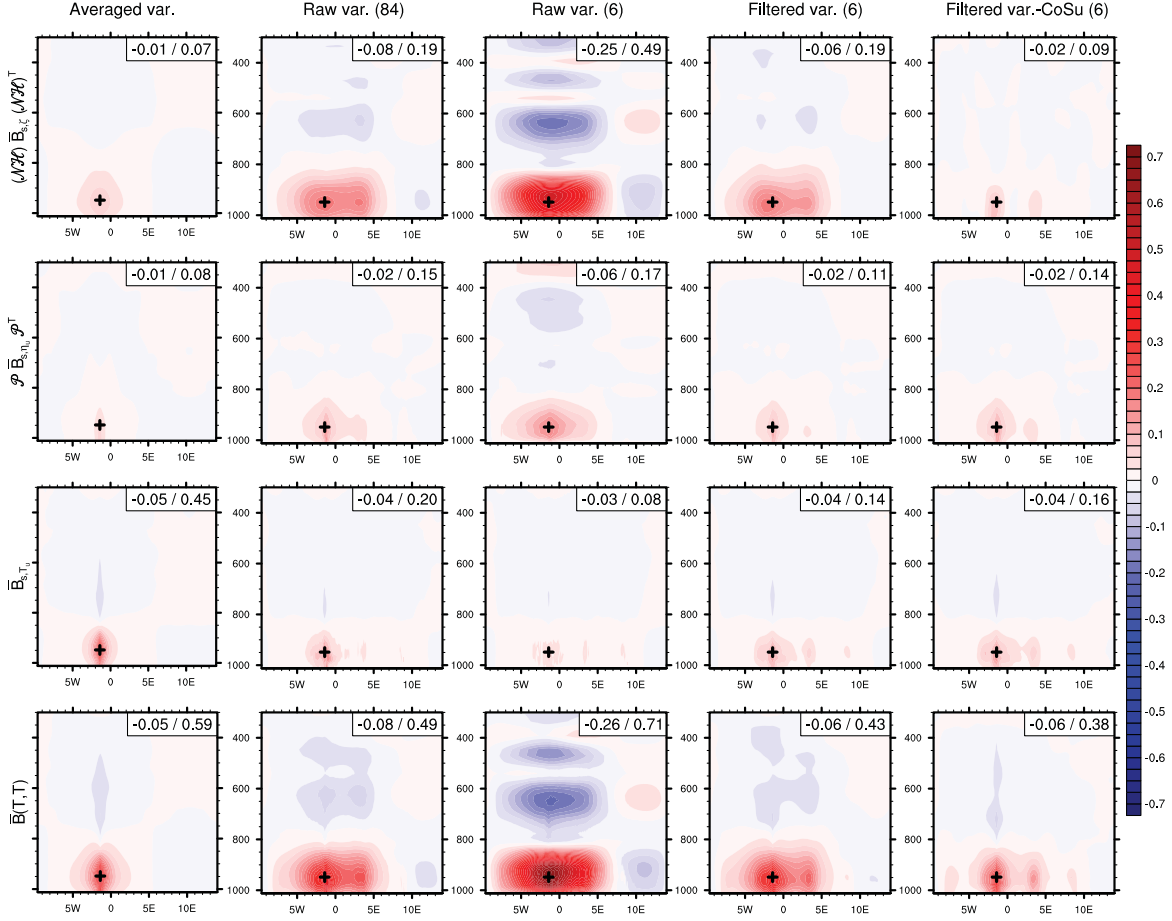


Figure 6.6. — Autocovariance normalisée de température et ses composantes (unité : K), ainsi que leurs extrema.

Autocovariance d'humidité spécifique

Le détail de l'autocovariance d'humidité spécifique (équation 6.7d) est donné par la figure 6.7. On constate que le couplage entre les variables dynamiques (vorticité et divergence) et l'humidité spécifique est très faible pour des variances homogènes. Ceci s'explique très probablement par le faible nombre d'échantillons précipitants comparativement au nombre d'échantillons total utilisé pour calibrer la matrice $\bar{\mathbf{B}}$. Pour des covariances calculées spécifiquement dans les précipitations, Montmerle et Berre (2010) ont en effet montré un fort couplage entre ces variables reflétant la dynamique des systèmes convectifs. Dans le cas présent, la principale composante multivariée provient donc de la température, avec le terme $\mathcal{S}\bar{\mathbf{B}}_{s,T_u}\mathcal{S}^T$.

Pour des variances hétérogènes, on observe comme pour la température que les composantes multivariées ont un poids plus important dans la matrice $\bar{\mathbf{B}}(q,q)$, d'autant plus que les variances spécifiées sont bruitées. Ainsi, pour les variances brutes à 6 membres, le poids de toutes les composantes multivariées semble largement surestimé et l'extension verticale et horizontale des covariances modélisées paraît également excessive. Cela signifie que le problème mentionné précédemment d'interaction entre les balances spectrales et des variances très hétérogènes ne se limite pas aux variables dynamiques, mais touche toutes les régressions. Toutefois, les variances brutes de T_u étant de plus grande échelle que celles de ζ et η_u , cette interaction est moins flagrante pour $\mathcal{S}\bar{\mathbf{B}}_{s,T_u}\mathcal{S}^T$ que pour $\mathcal{Q}\mathcal{H}\bar{\mathbf{B}}_{s,\zeta}(\mathcal{Q}\mathcal{H})^T$ et $\mathcal{R}\bar{\mathbf{B}}_{s,\eta_u}\mathcal{R}^T$.

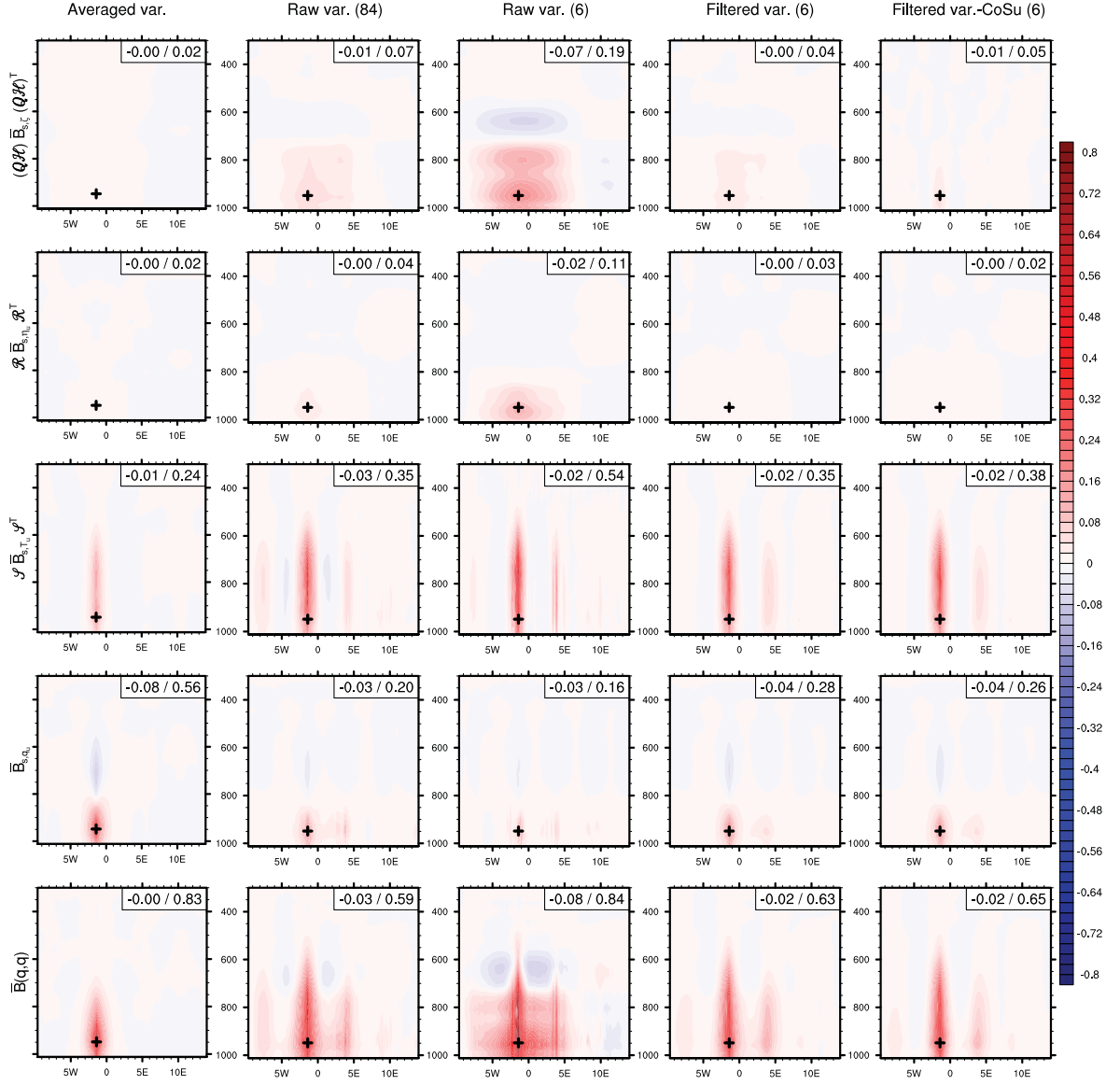


Figure 6.7. — Autocovariance normalisée d’humidité spécifique et ses composantes (unité : g.kg^{-1}), ainsi que leurs extrema.

Covariance croisée température/humidité spécifique

La covariance croisée de température et d’humidité spécifique fait intervenir de nombreux opérateurs de régression, comme le montre l’équation 6.8. Il n’est donc pas étonnant que les interactions entre ces opérateurs et les variances hétérogènes décrites dans les paragraphes précédents s’y retrouvent, comme le montre la figure 6.8. Dans le cas où les variances sont homogènes horizontalement, on observe un minima au niveau de l’observation, et un maxima très faible juste au-dessus. Lorsque les variances sont hétérogènes spatialement, la structure de la covariance croisée est complètement modifiée : des maxima très importants apparaissent, et la géométrie du minimum change radicalement, au point de disparaître dans certains cas. On note également de fortes propagations horizontales dans le cas non filtré à 6 membres.

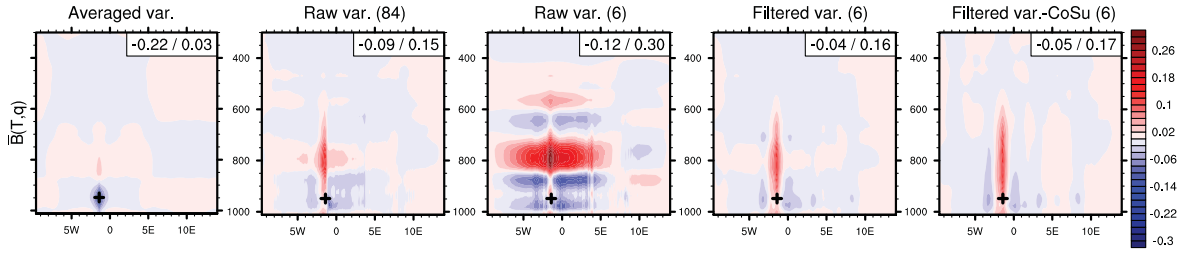


Figure 6.8. — Covariance croisée normalisée de température (au point d’observation) et d’humidité spécifique (unité : g.kg^{-1}), et ses extrema.

6.1.4. Dépendance à l’écoulement

La comparaison des matrices $\bar{\mathbf{B}}$ incluant des variances hétérogènes ou non montre des différences qui vont au-delà de la simple modulation locale d’amplitude. Les portées horizontales, voire verticales, sont augmentées, et un poids plus important est mis sur les composantes multivariées. Dans cette section, on compare à présent les covariances modélisées utilisant des variances hétérogènes (matrice $\bar{\mathbf{B}}$) à des covariances totales échantillonnées directement à partir du même grand ensemble (matrice $\tilde{\mathbf{B}}$).

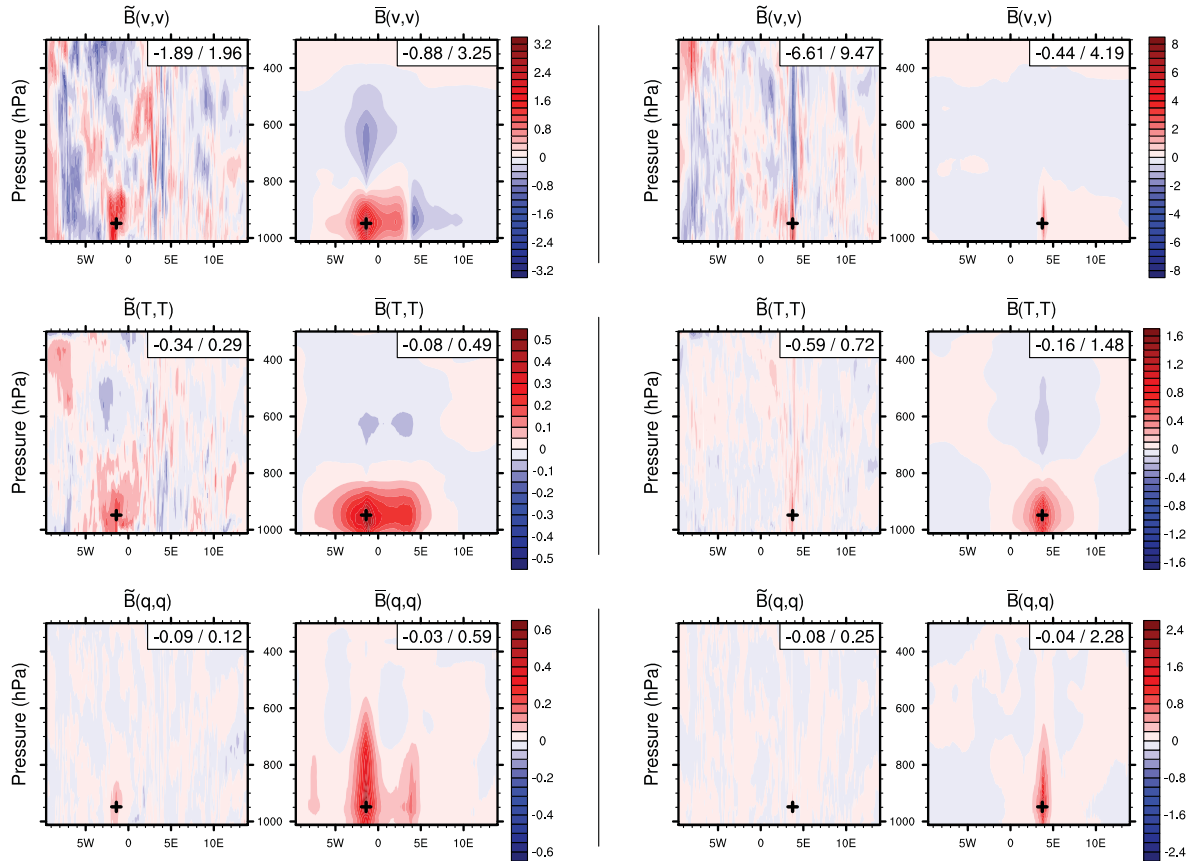


Figure 6.9. — Autocovariance normalisée échantillonnée directement à partir de l’ensemble à 90 membres ($\tilde{\mathbf{B}}$) et modélisée en incluant des variances brutes à 84 membres ($\bar{\mathbf{B}}$) pour le vent méridien, la température et l’humidité spécifique (de haut en bas, unités respectives : m.s^{-1} , K et g.kg^{-1}), et leurs extrema.

La figure 6.9 montre cette comparaison pour l'autocovariance implicite de vent zonal (rangée supérieure). Les différences entre les covariances modélisées à l'est et à l'ouest du domaine reflètent en partie la dépendance à l'écoulement indiquée par le grand ensemble. Le caractère localisé de la covariance à l'est reflète l'influence des zones convectives de petite échelle sur la matrice \mathbf{B} . Outre l'aspect bruité des covariances échantillonnées, on peut noter l'accord relatif entre ces dernières et les covariances modélisées concernant leur structure spatiale (plus étendue à l'ouest et plus resserrée à l'est). Cependant, leurs amplitudes montrent des différences importantes, de l'ordre d'un facteur 2, dont le sens change entre l'est et l'ouest. Pour la température, la figure 6.9 (rangée du milieu) montre que les structures spatiales des covariances échantillonnées et modélisées sont très différentes, et que les amplitudes semblent systématiquement plus fortes pour les covariances modélisées, d'un facteur 2 également. Pour l'humidité spécifique, la figure 6.9 (rangée inférieure) montre des disparités encore plus grandes pour la structure spatiale comme pour l'amplitude. Pour le point d'observation situé à l'est, l'amplitude des covariances modélisées est par exemple plus de 9 fois plus forte dans celle des covariances échantillonnées (respectivement $2,28 \text{ g.kg}^{-1}$ et $0,25 \text{ g.kg}^{-1}$).

Ces figures illustrent un autre aspect des différences pour la représentation des covariances d'erreur d'ébauche entre une approche purement ensembliste et une autre basée sur un modèle : la première produit des covariances très localisées (l'ajout d'une localisation renforcerait ce constat), fortement dépendantes de l'écoulement, la seconde modélise des covariances lisses, plus étendues, avec une dépendance à l'écoulement moins marquée.

6.1.5. Conclusions

Dans cette section, différents champs de variance d'erreur d'ébauche ont été diagnostiqués pour les variables non balancées, puis utilisés dans la modélisation de plusieurs matrices \mathbf{B} . Tous les termes des principaux blocs constituant ces matrices ont ensuite été comparés avec un point d'observation caractérisé par de faibles variances, et dans certains cas avec un autre point d'observation caractérisé par des variances plus fortes. Dans les deux cas de figure, l'impact des variances hétérogènes sur les covariances modélisées va au-delà de simples modifications locales d'amplitude. Comparativement au cas où \mathbf{B} est modélisée avec des variances homogènes, les covariances produites montrent en effet des amplitudes et des structures fortement différentes, y compris parfois à grande distance du point d'observation considéré. Il faut noter que le bruit d'échantillonnage pourrait aussi affecter les régressions spectrales de l'opérateur de balance, comme cela a déjà été mentionné par Derber et Bouttier (1999) et confirmé par Fisher *et al.* (2009), ce qui pourrait amplifier l'effet des interactions défavorables entre variances hétérogènes et balances.

L'application du filtrage homogène présenté précédemment sur les variances brutes permet de diminuer fortement le bruit d'échantillonnage des variances, ce qui réduit aussi ces artefacts. On obtient ainsi à moindre coût des covariances équivalentes à celles obtenues en utilisant des variances asymptotiques tirées d'un grand ensemble.

La matrice $\bar{\mathbf{B}}$ modélisée en incluant des variances hétérogènes issues du grand ensemble (donc peu bruitées) est cependant assez différente en termes d'amplitude et de portée de la matrice directement échantillonnée.

6.2. Test d'impact sur une longue période

La section précédente a illustré certaines limitations de la matrice $\bar{\mathbf{B}}$ modélisée utilisant des variances hétérogènes. Cependant, cette matrice $\bar{\mathbf{B}}$ comporte tout de même une composante dépendant de l'écoulement et il est intéressant de poursuivre son évaluation dans le 3D-Var AROME. Pour cela, une assimilation d'ensemble AEARO à 6 membres a été conduite pendant une période de 6 semaines à l'automne 2012. Dans cette section, le cadre expérimental est brièvement décrit avant une discussion sur le comportement du filtrage des variances et sa dépendance à l'écoulement, pour conclure enfin avec les scores obtenus par des configurations utilisant de façons différentes les variances de l'ensemble.

6.2.1. Caractéristiques des simulations

Événements météorologiques

La période retenue pour les tests, du 11 octobre au 21 novembre 2012, entre dans le cadre du projet “Hydrological cycle in Mediterranean Experiment” (HyMeX, Drobinski *et al.* (2013)). Le début de la période est en particulier concomitant avec la première “Special Observation Period” (SOP-1, Ducrocq *et al.* (2013)), qui a eu lieu du 5 septembre au 6 novembre 2012.

Cette période est caractérisée par plusieurs événements de fortes précipitations à contextes synoptiques différents, comme le montre la figure 6.10 pour les 19 octobre, 26 octobre et 10 novembre 2012. Des cas de fronts précipitants, d'épisodes cévenols ou de convection isolée ont en effet été observés. Une telle alternance de régimes de temps calmes et agités permet de tester les modifications apportées au système d'assimilation dans une grande variété de situations.

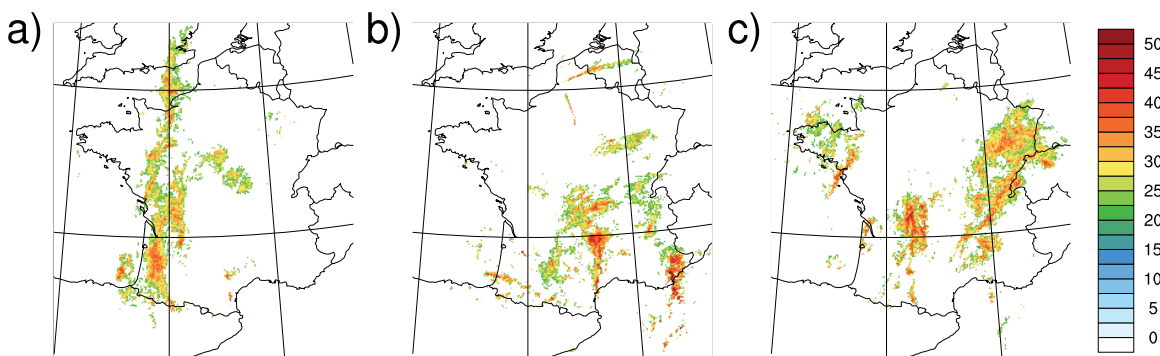


Figure 6.10. — Réflectivité radar du réseau ARAMIS (unité : dBZ), le 19 octobre 2012 à 12 h UTC (a), le 26 octobre 2012 à 15 h UTC (b) et le 10 novembre 2012 à 6 h UTC (c).

Description de l'ensemble

Le système d'assimilation utilisé pour cette expérience est très proche de celui décrit dans le chapitre 2. Les 6 membres de l'AEARO sont couplés aux 6 membres de l'AEARP opérationnelle. Il faut noter que dans cette dernière et à cette date, les corrélations d'erreur d'ébauche des variables non balancées ne sont plus climatologiques et homogènes, mais dépendantes de l'écoulement et hétérogènes grâce à une formulation en ondelettes recalculée de façon journalière (Varella *et al.*, 2011).

La différence principale pour l'AEARO consiste en l'ajout d'une inflation $\bar{\lambda}$ des perturbations dans le but d'améliorer la dispersion de l'ensemble. Cette inflation a donc une influence

directe sur l'amplitude des variances calculées à partir de l'ensemble. Implémentée par Laure Raynaud (CNRM/GMAP), la méthode utilisée pour calculer l'inflation dans l'AEARO est différente de celle utilisée pour l'AEARP (Raynaud *et al.*, 2012), puisqu'elle se base sur la formule :

$$\bar{\lambda} = \frac{\text{Tr}(\mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T])}{\text{Tr}(\tilde{\mathbf{B}})} \quad (6.10)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}$ est la différence entre la moyenne d'ensemble des prévisions perturbées et l'analyse d'un cycle d'assimilation non perturbé, tous deux valides au même instant : $\boldsymbol{\varepsilon} = \langle \tilde{\mathbf{x}}^b \rangle - \mathbf{x}^a$. Les propriétés théoriques de cette estimation sont détaillées dans l'annexe A.6. Dans la version implémentée pour l'AEARO, une hypothèse d'ergodicité spatiale permet de remplacer les espérances de l'équation 6.10 par des moyennes horizontales sur tout le domaine :

$$\bar{\lambda} \simeq \frac{\mu^S(\boldsymbol{\varepsilon} \circ \boldsymbol{\varepsilon})}{\mu^S(\tilde{\mathbf{v}})} \quad (6.11)$$

Une moyenne verticale est également effectuée, sur trois couches atmosphériques correspondant à peu près à la basse troposphère, la moyenne troposphère et la haute troposphère/stratosphère. Un profil d'inflation affine par morceaux est ensuite reconstitué à partir de ces trois valeurs. L'inflation est ainsi estimée pour une seule variable (la température), puis appliquée à toutes les variables. L'objectif de ce schéma est de préserver au maximum les équilibres du système, qui seraient perturbés si l'inflation changeait trop fortement selon la variable et selon le niveau.

On constate dans la figure 6.11 que l'inflation estimée est assez stable dans le temps, qu'elle oscille entre 1 et 1,3 dans la troposphère, mais qu'elle est inférieure à 1 dans la partie supérieure du modèle. Ceci peut s'expliquer par la relaxation spectrale du modèle AROME vers le coupleur ARPEGE au sommet du premier. Ainsi, dans les niveaux les plus élevés :

- $\mu^S(\tilde{\mathbf{v}})$ devrait donner une estimation ensembliste de la variance moyenne des coupleurs perturbés de l'AEARP,
- $\mu^S(\boldsymbol{\varepsilon} \circ \boldsymbol{\varepsilon})$ devrait donner une estimation spatiale (par l'hypothèse d'ergodicité) de la variance moyenne de l'ébauche ARPEGE (à quelques modulations près indiquées précédemment).

Cependant, ce dernier terme est calculé après interpolation sur la grille AROME. La maille de la grille AROME étant nettement plus fine que celle d'ARPEGE, ceci conduit à une sous-estimation de $\mu^S(\boldsymbol{\varepsilon} \circ \boldsymbol{\varepsilon})$.

6.2.2. Filtrage des variances du jour

Comportement des variances

Les variances des variables non balancées sont calculées à chaque cycle d'assimilation à partir de l'ensemble de 6 membres. La racine carrée du profil des variances moyennes et ses variations temporelles sont indiquées sur la figure 6.12. De manière analogue à ce qui avait déjà été montré par Brousseau *et al.* (2012), on constate des variations assez importantes de variance moyenne, qui étaient toutefois attendues en raison des changements de régime de temps. Par exemple, les valeurs maximales pour les variables dynamiques sont probablement liées à la présence de précipitations (Montmerle et Berre, 2010).

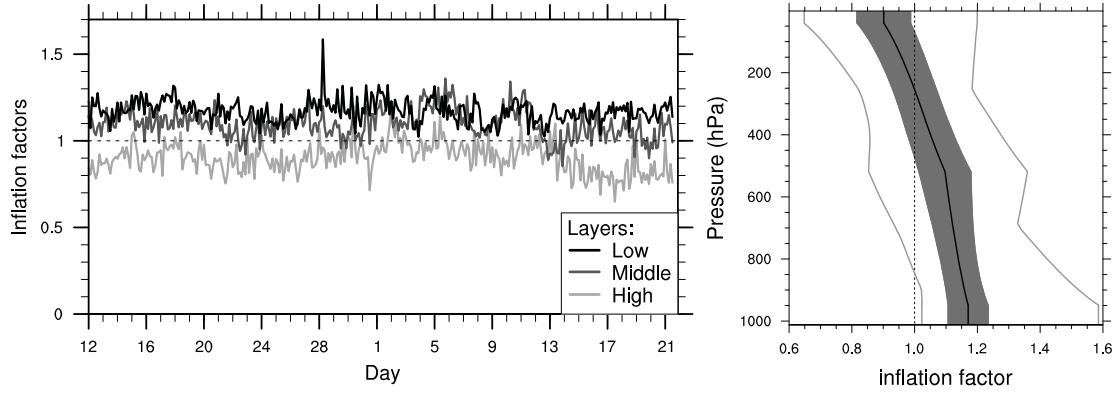


Figure 6.11. — À gauche : coefficients d'inflation appliqués à l'AEARO de 6 membres du 12 octobre au 21 novembre 2011, et moyennés horizontalement pour trois couches atmosphériques : basse troposphère, moyenne troposphère et haute-troposphère/stratosphère. À droite : inflation modélisée en moyenne temporelle (trait plein noir), écarts-types (zone grisée) et extrema (traits pleins gris).

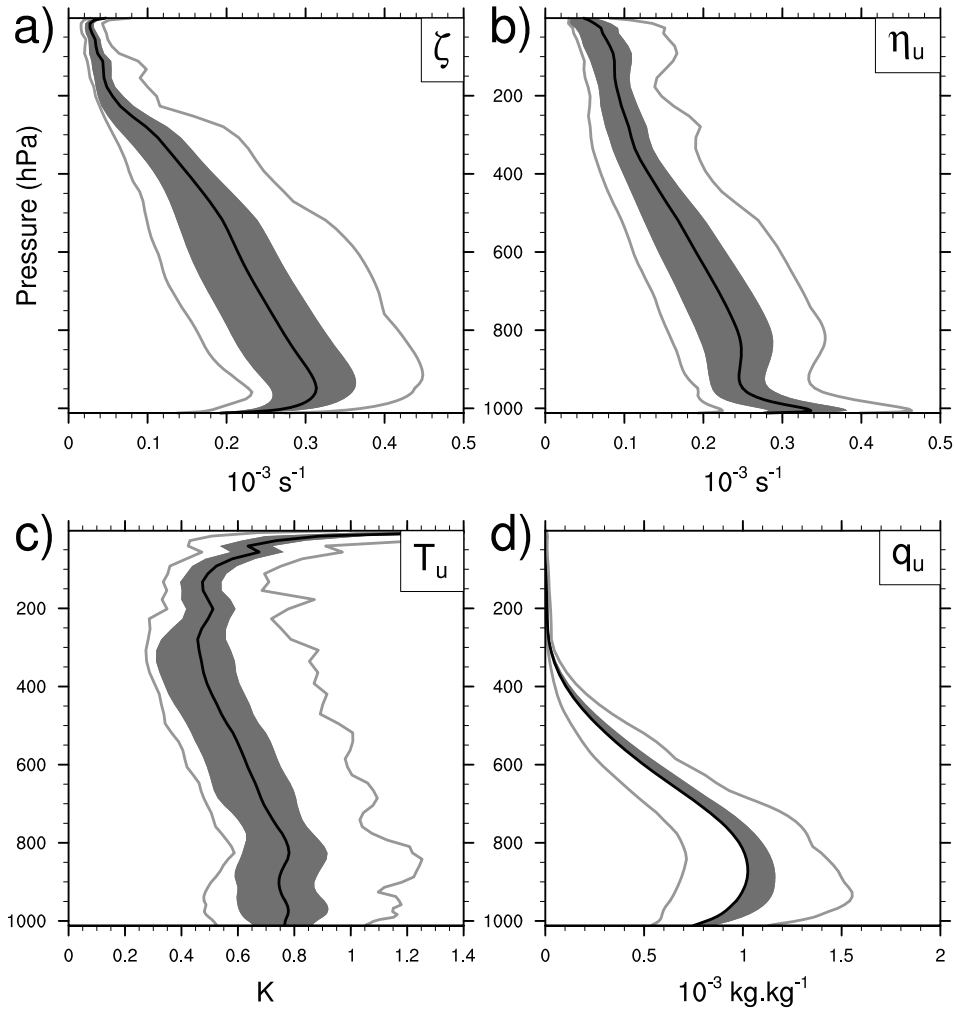


Figure 6.12. — Racine carrée de la moyenne horizontale des variances brutes : moyenne temporelle (trait plein noir), écarts-types (zone grisée) et extrema (traits pleins gris), pour la vorticité (a), la divergence non balancée (b), la température non balancée (c) et l'humidité spécifique non balancée (d).

Un autre point intéressant concerne la variance spatiale des variances brutes ou filtrées, moyennées temporellement. La figure 6.13 en montre la racine quatrième de manière à ce que la dimension reste celle du champ initial. L'effet du filtrage est très net : il réduit la variance spatiale de la variance à tous les niveaux et pour toutes les variables, dans des proportions assez similaires.

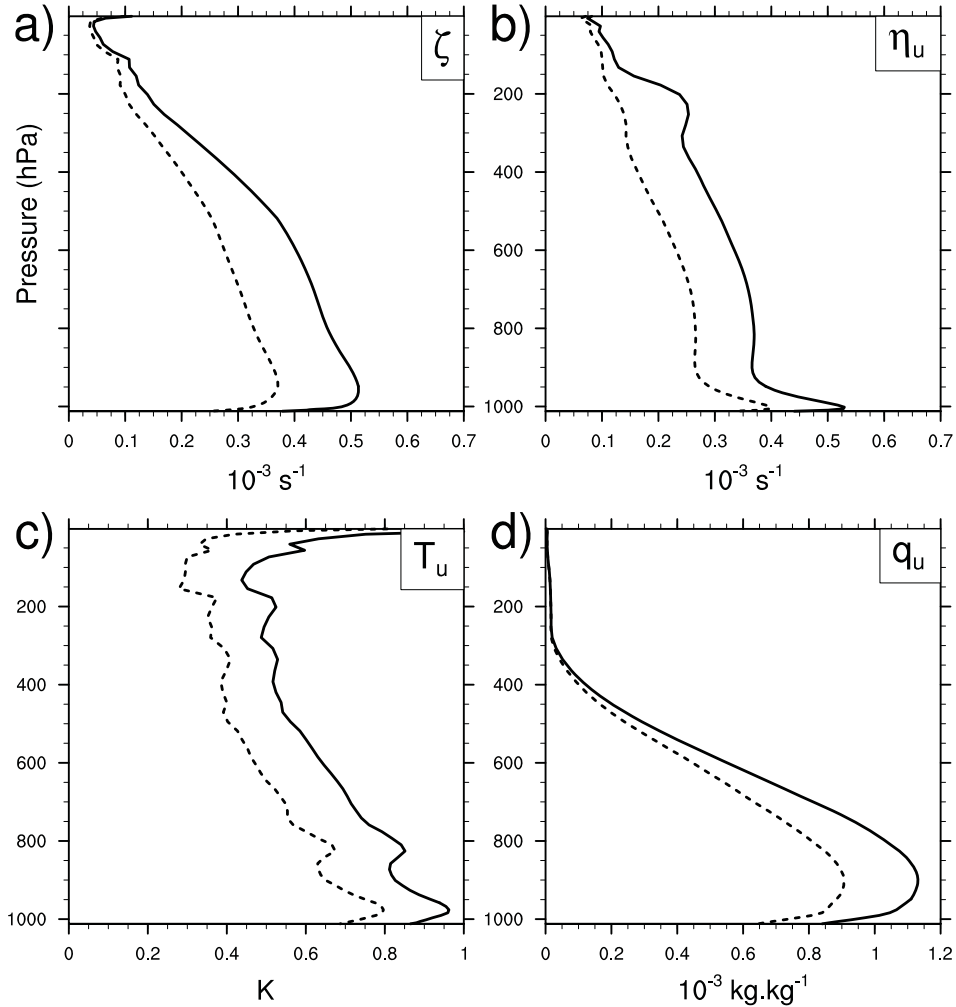


Figure 6.13. — Racine quatrième de la variance horizontale des variances brutes (trait plein) et des variances filtrées (tireté), pour la vorticité (a), la divergence non balancée (b), la température non balancée (c) et l'humidité spécifique non balancée (d).

Comportement de la troncature de filtrage

On choisit de filtrer les variances avec un noyau gaussien dont la longueur est optimisée par le critère général 4.7. Les principales caractéristiques pour la période de la troncature spectrale correspondant à cette longueur de filtrage sont données par la figure 6.14. La variabilité importante de cette troncature de filtrage semble indiquer une forte dépendance à l'écoulement du filtre développé dans la section 4.1. Contrairement à ce qui observé dans la figure 13 de Bonavita *et al.* (2011), la troncature spectrale ne montre pas d'effet de saturation, ce qui signifie que le filtrage est toujours actif, quelque soit la variable et le niveau, à l'exception de q_u dans la stratosphère.

On note les points déjà mentionnés au chapitre précédent : nécessité d'un filtrage plus fin pour ζ et η_u avec des troncatures moyennes autour de 20, filtrage de grande échelle pour T_u au-dessus de la tropopause dû à la plus grande uniformité de cette variable à ces altitudes, très forte troncature utilisée pour q_u dans ces mêmes couches très sèches de l'atmosphère qui implique en fait un filtrage quasiment nul. À l'échelle globale dans l'AEARP opérationnelle (Raynaud *et al.*, 2011), ces deux derniers points sont également visibles, bien que les profils moyens soient plus bruités. Pour ζ et η_u en revanche, des valeurs de troncature équivalentes à celles des autres variables ont été trouvées, ce qui est probablement dû à la faible résolution spatiale utilisée.

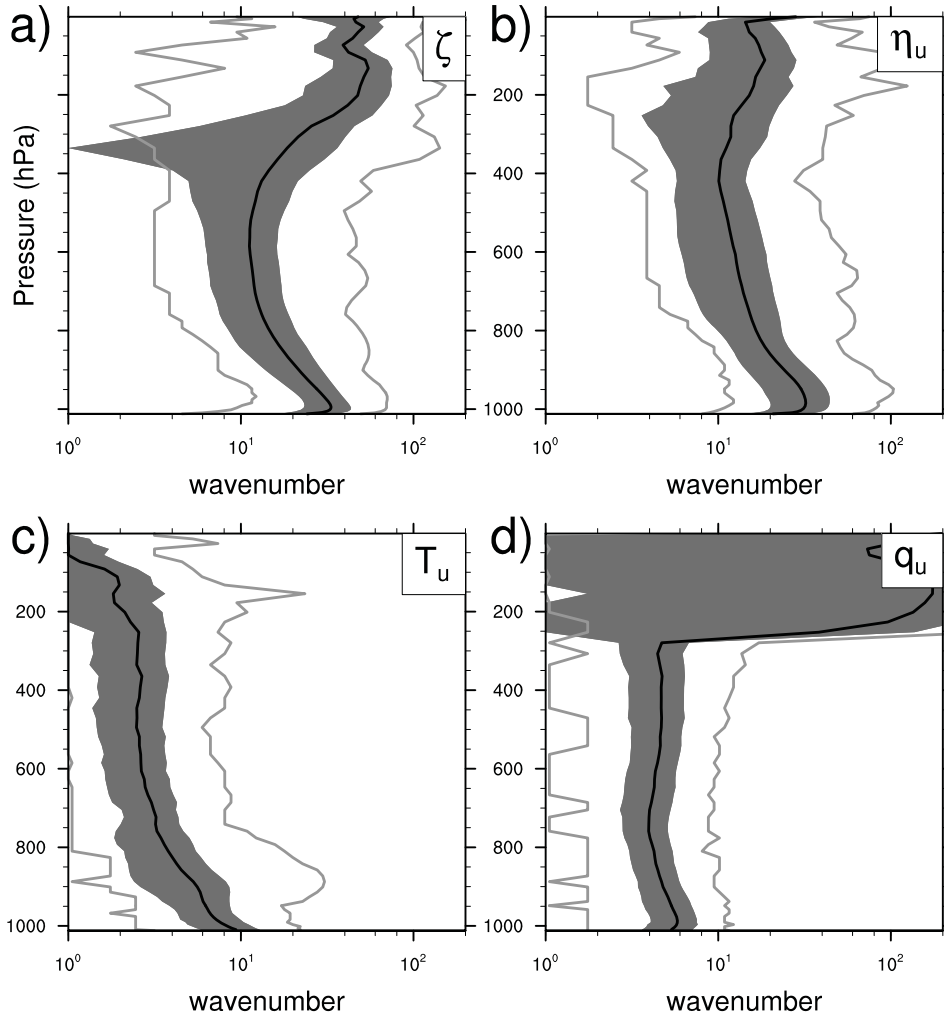


Figure 6.14. – Troncature de filtrage : moyenne temporelle (trait plein noir), écarts-types (zone grisée) et extrema (traits pleins gris), pour la vorticité (a), la divergence non balancée (b), la température non balancée (c) et l'humidité spécifique non balancée (d).

Dépendance au flux de la troncature de filtrage

Il est parfois possible de corréler la troncature de filtrage à certains prédicteurs pertinents. Ainsi, la figure 6.15 montre la série temporelle de troncature de filtrage des variances de divergence non balancée de basse couche, moyenn e verticalement de la surface au niveau 53 (~ 980 hPa, noir), et liss e sur une fenêtre de 24 h pour enlever le signal diurne. On la superpose aux séries temporelles de deux prédicteurs caractéristiques du régime de temps dominant :

- la pression de surface moyenne sur le domaine,
- la proportion de zones précipitantes dans le domaine.

On constate alors que les variations de troncature de filtrage semblent être corrélées avec celles de pression de surface moyenne, et anticorrélées avec la proportion de zones précipitantes, qui sont logiquement étendues en période dépressionnaire. C'est ce qu'indique la figure 6.16, en quantifiant ces corrélations : 0,56 pour la pression de surface moyenne et -0,53 avec la proportion de zones précipitantes. Ces corrélations non nulles confirment que la troncature de filtrage obtenue par le critère général 4.7 dépend de l'écoulement. Cependant, la complexité de cette dépendance peut se manifester à travers tous les facteurs listés dans l'illustration analytique de la section 4.3 qui influencent la longueur de filtrage : écart-type et échelle caractéristique des variances asymptotiques, nombre de membres de l'ensemble.

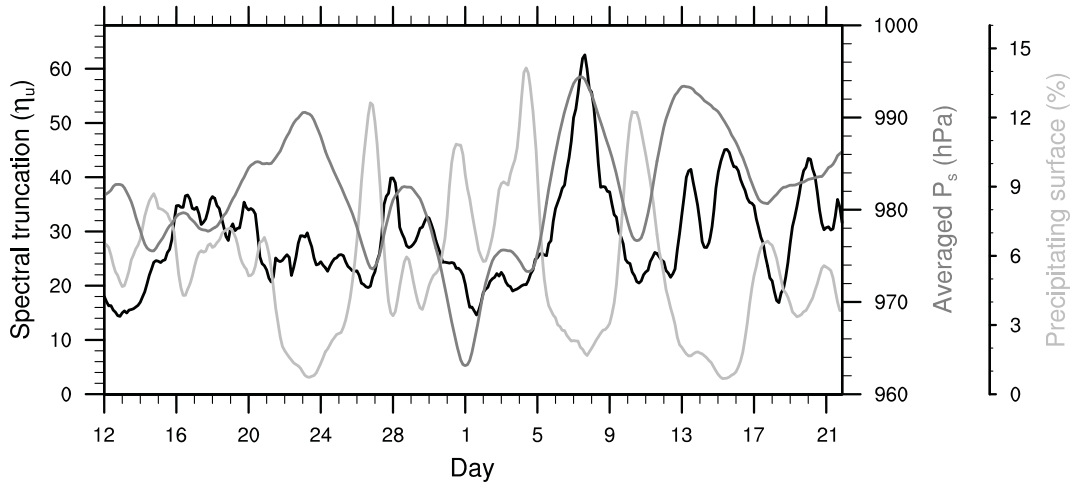


Figure 6.15. — Séries temporelles de troncature spectrale du filtrage des variances de divergence non balancée, moyennée verticalement de la surface au niveau 53 (~ 980 hPa, noir), de pression de surface moyenne sur le domaine (gris) et de proportion de zones précipitantes dans le domaine (gris clair). Une moyenne glissante de 24 h a été appliquée pour lisser la variabilité diurne.

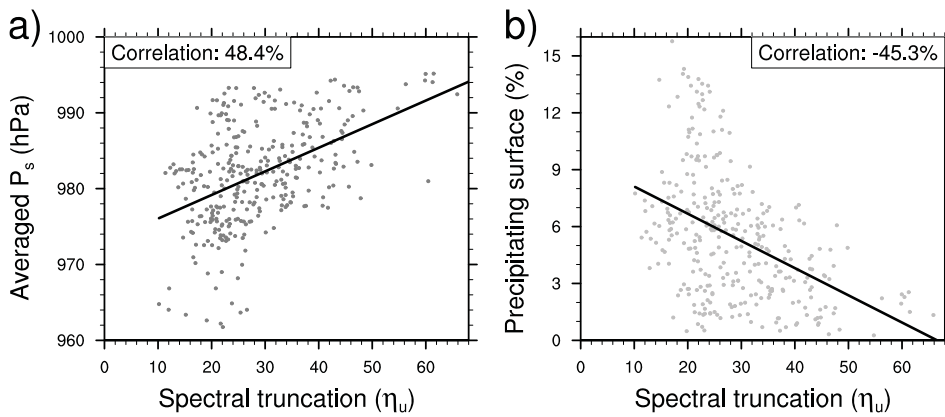


Figure 6.16. — Corrélations entre la troncature spectrale du filtrage des variances, moyennée verticalement de la surface au niveau 53 (~ 980 hPa) d'une part et la pression de surface moyenne sur le domaine (a) ou le pourcentage de zone précipitante dans le domaine (b) d'autre part.

6.2.3. Utilisation des variances filtrées

Configurations testées

Pour évaluer la pertinence de l'utilisation des variances du jour et l'impact de leur filtrage dans les matrices d'autocovariance des variables non balancées d'AROME, on teste plusieurs configurations pour les variances échantillonnées à partir de l'ensemble de 6 membres, résumées dans le tableau 6.2 :

Table 6.2. – Configurations de variances testées avec l'ensemble à longue période.

Configuration	Moyenne temporelle	Filtrage spatial
“Climatological var.”	Oui	Moyenne horizontale
“Averaged var.”	Non	Moyenne horizontale
“Raw var.”	Non	Non
“Filtered var.”	Non	Filtrage horizontal
“Averaged/filtered var.”	Non	Moyenne horizontale pour (ζ, η_u) , Filtrage horizontal pour (T_u, q_u)
“Filtered var.-CoSu”	Non	Filtrage horizontal Opérateur \mathcal{H} à support compact (Guidard, 2007)
“Averaged var.-univariate”	Non	Moyenne horizontale Opérateur $\bar{\mathbf{K}}_p = \mathbf{I}$
“Filtered var.-univariate”	Non	Filtrage horizontal Opérateur $\bar{\mathbf{K}}_p = \mathbf{I}$

La figure 6.17 montre les cartes de variances brutes et filtrées en basse couche pour ζ , T_u et q_u . On peut remarquer les différences d'échelle caractéristique pour les variances brutes entre ζ d'un côté et T_u/q_u de l'autre, ainsi que l'efficacité du filtrage pour réduire le bruit d'échantillonnage. Il faut noter que les variances ont été recalculées spécialement dans les deux dernières configurations : soit en utilisant \mathcal{H} à support compact pour appliquer $\bar{\mathbf{K}}_p^{-1}$ dans “Filtered var.-CoSu”, soit sans appliquer $\bar{\mathbf{K}}_p^{-1}$ pour obtenir les variances totales dans “Filtered var.-univariate”.

Premier incrément d'analyse

Comme pour l'ensemble décrit au chapitre 2, plusieurs cycles d'assimilation de l'ensemble sont effectués avant d'obtenir un ensemble mature utilisable (typiquement 4 cycles, cf. figure 2.9). Dès que cette période est terminée, les différentes configurations sont lancées à partir d'une ébauche commune (celle de l'opérationnel). Lors du premier cycle d'assimilation pour ces configurations, les ébauches sont donc toutes semblables, mais les variances utilisées dans la matrice $\bar{\mathbf{B}}$ sont différentes. Les incréments d'analyse obtenus à l'issue des minimisations pour les différentes configurations donnent donc une indication intéressante sur l'impact des variances spécifiées dans un cadre où l'ensemble des observations est pris en compte (cf. chapitre 2).

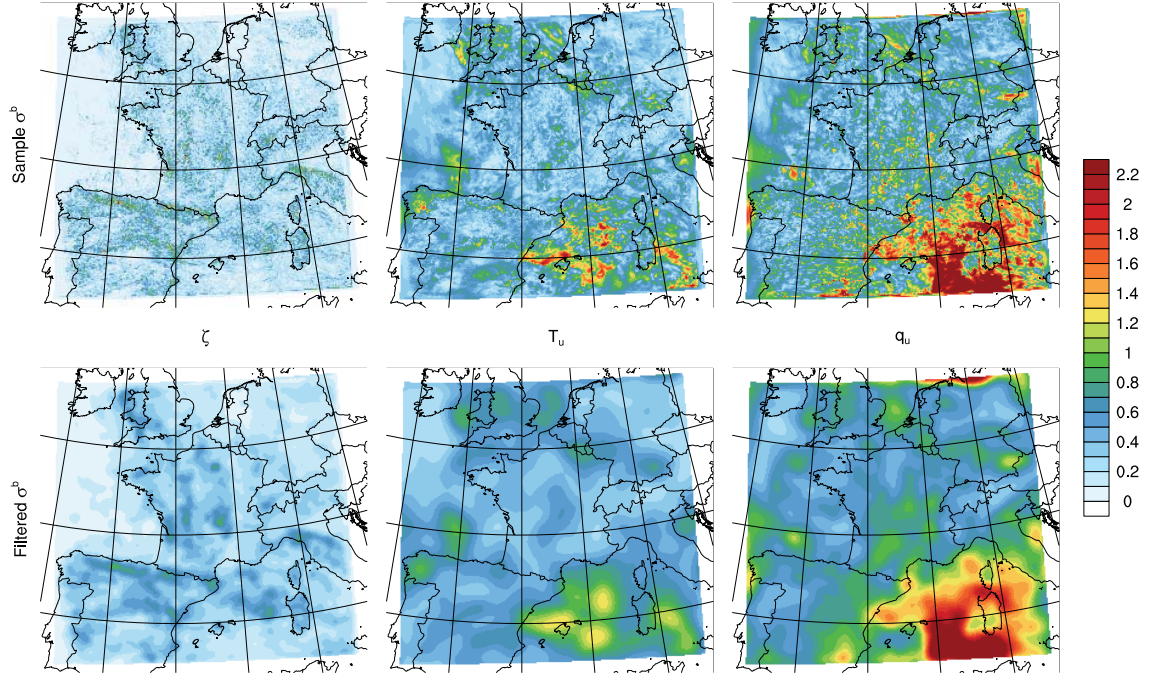


Figure 6.17. — Ecart-types d’erreur d’ébauche de vorticité, de température non balancée et d’humidité spécifique non balancée au niveau 50 (~ 945 hPa, de gauche à droite), bruts (en haut) et filtrés (critère général 4.7, en bas), pour l’ensemble à 6 membres, le 11 octobre 2012, 15 h UTC (unités respectives : 10^{-3} s^{-1} , K et g.kg^{-1}).

Les figures 6.18 et 6.19 montrent respectivement des coupes d’incrément d’analyse de température, horizontale en basse couche et verticale. Ainsi, comme on l’a noté dans la première section de ce chapitre, les variances brutes augmentent l’amplitude et la portée des covariances modélisées, et donc de l’incrément d’analyse, en particulier dans les zones peu observ es (ex. : proche Atlantique, sud de la Sardaigne). Dans les zones densément observ es, le bruit d’échantillonnage reste visible, mais les synergies entre observations limitent l’amplitude et la portée des incréments. Le filtrage des variances permet de ramener efficacement l’incrément à des structures plus vraisemblables. L’impact de la réduction de \mathcal{H}   un support compact est faible, mais visible pour les structures de grande portée, en particulier dans les zones peu observ es. Dans ce cas, l’analyse obtenue est très proche de la configuration “Averaged/filtered var.”, où seules des valeurs moyennes de variance sont prises en compte pour les variables dynamiques. L’utilisation de variances hétérogènes filtrées pour ces dernières (“Filtered var.”) a pour effet d’augmenter globalement les amplitudes des incréments, comme on peut le voir surtout sur les coupes verticales (figure 6.19). Ceci confirme les conclusions de la section précédente, où l’augmentation de l’amplitude due aux termes multivariés dans les covariances totales était déjà visible pour ce cas de figure. L’absence d’opérateur de balance diminue l’amplitude de l’incrément du fait de la suppression des contributions multivari es.

Les incréments de vent zonal (figures 6.20 et 6.21) sont plus importants dans le cas “Filtered var” que dans le cas “Averaged var”, ce qui était déjà le cas pour la température (figures 6.18 et 6.19). Ces modifications importantes sont dues aux écarts types de ζ et de η_u (comme le confirme la comparaison entre “Filtered var” et “Averaged/Filtered var”). Elles sont également présentes dans le cas univarié (sous-figure “Filtered var.-univariate”). L’hétérogénité des variances de ζ et de η_u a donc un effet marqué sur les incréments de vent (de façon indépendante des aspects de balance) qui n’est peut être pas pertinent.

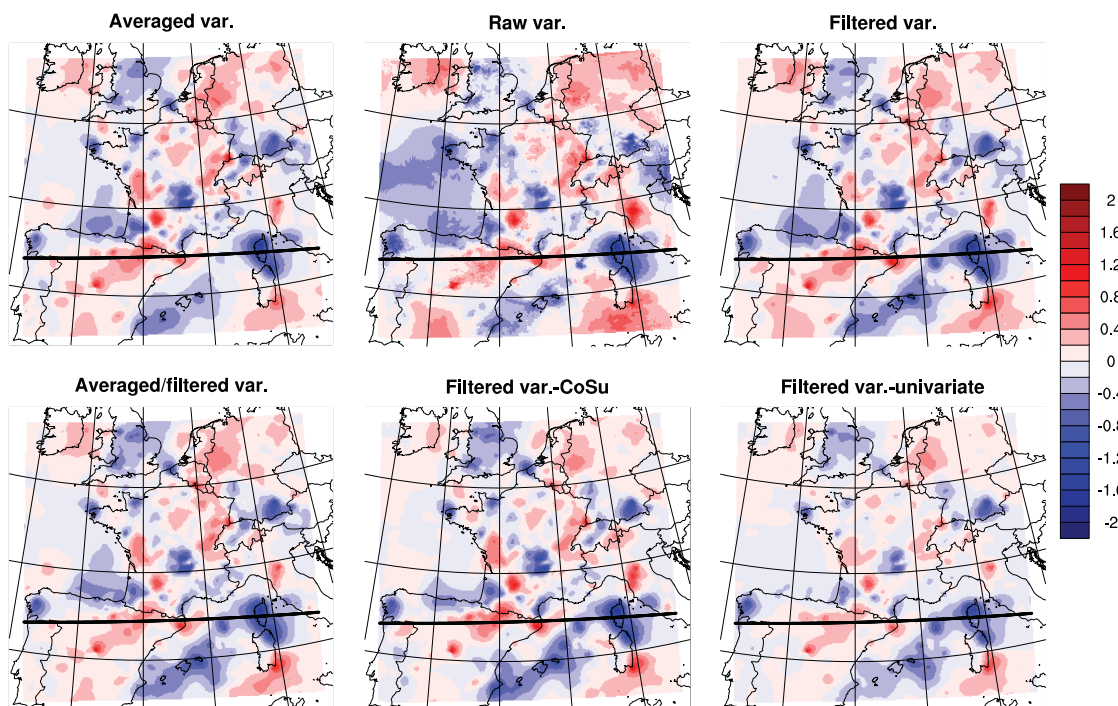


Figure 6.18. — Incrément d’analyse de température au niveau 50 (~ 945 hPa) lors du premier cycle d’assimilation de certaines configurations du tableau 6.2, le 11 octobre 2012, 15 h UTC (unité : K).

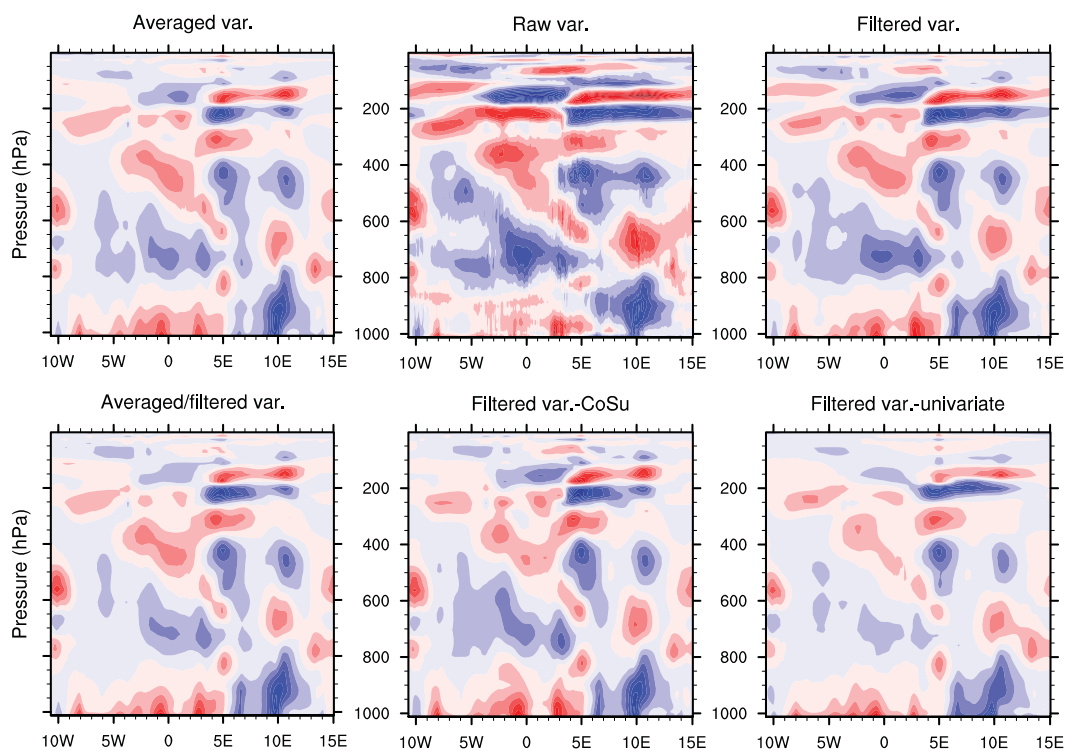


Figure 6.19. — Incrément d’analyse de température aux alentours de la latitude 42°N (ligne noire sur la figure 6.18), lors du premier cycle d’assimilation de certaines configurations du tableau 6.2, le 11 octobre 2012, 15 h UTC (unité : K).

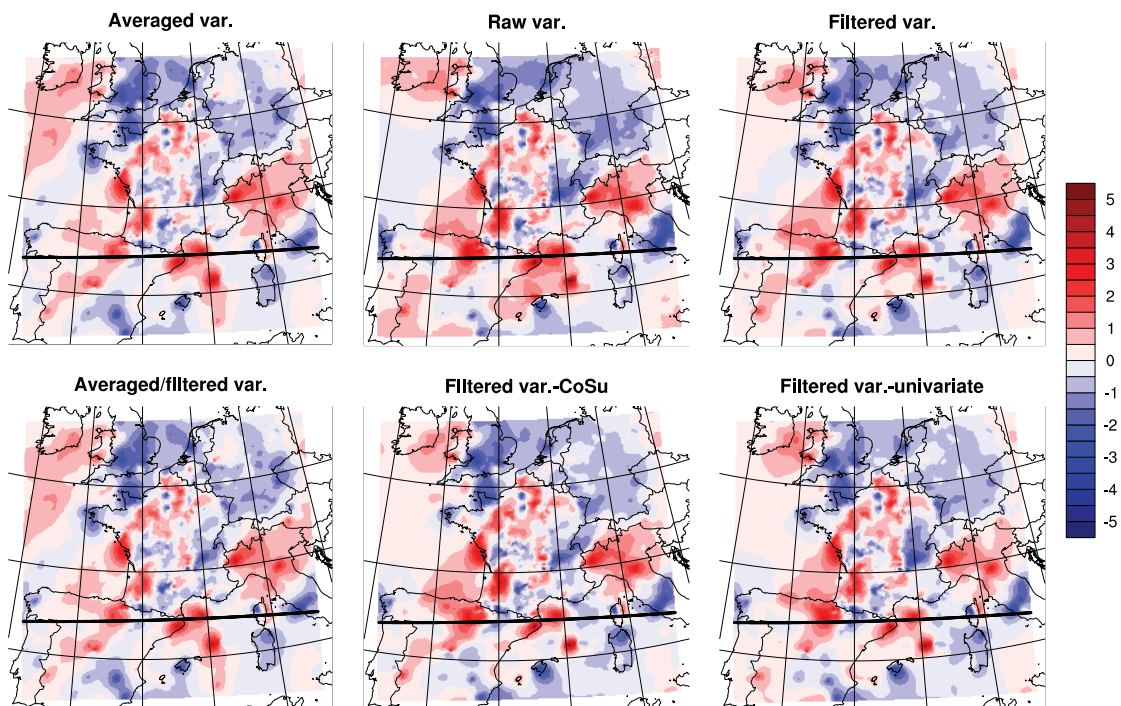


Figure 6.20. — Comme la figure 6.18 pour le vent zonal (unité : m.s^{-1}).

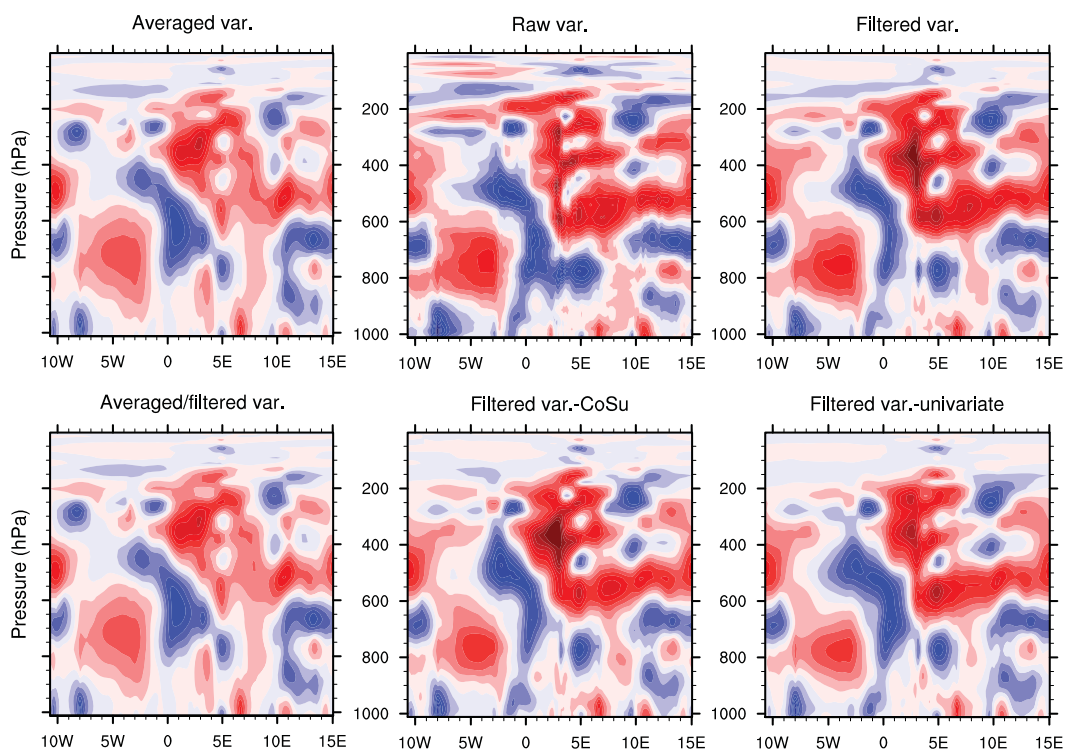


Figure 6.21. — Comme la figure 6.19 pour le vent zonal (unité : m.s^{-1}).

Il faut noter que dans chaque configuration, la variance moyenne donnée par $\text{Tr}(\bar{\mathbf{B}})$ est différente, ce qui modifie *de facto* l'amplitude de l'incrément d'analyse. Cependant, aucun ajustement n'a été entrepris pour que cette valeur moyenne se rapproche de sa valeur optimale, ce qui est généralement fait pendant le réglage d'un système d'assimilation.

Spin-up du modèle

Comme mentionné au chapitre 1, il est important que l'incrément d'analyse respecte les grands équilibres du modèle (hydrostatisme et géostrophisme en particulier), afin d'éviter un ajustement brutal de l'état du modèle vers l'attracteur dans les premiers pas de temps de la prévision. Cependant, cet ajustement (appelé spin-up) a toujours lieu, et peut être quantifié en examinant la moyenne spatiale de certaines tendances physiques, de pression de surface notamment (figure 3 de Seity *et al.* (2011)). Il faut noter que ce diagnostic, montré par la figure 6.22 pour les différentes configurations, quantifie le caractère équilibré ou non de l'incrément d'analyse, pas sa pertinence complète. Par exemple, un incrément nul est parfaitement équilibré, et donne un spin-up minimum. A titre de référence, le spin-up diagnostiqué par Seity *et al.* (2011) pour les premières configurations du 3D-Var AROME est de l'ordre de 12 Pa.s^{-1} , ce qui signifie que même notre configuration ayant le plus fort spin-up reste à des valeurs acceptables.

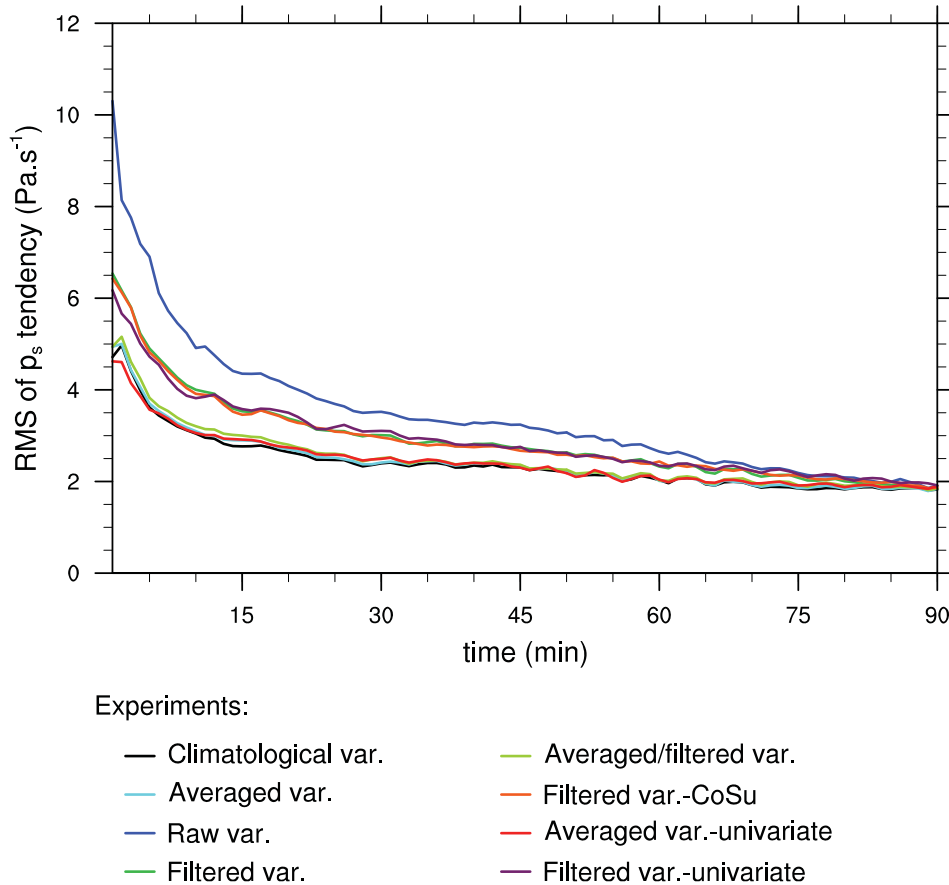


Figure 6.22. — Evolution temporelle de la racine carrée de la moyenne quadratique de la tendance de pression de surface lors du premier cycle d'assimilation des différentes configurations du tableau 6.2, le 11 octobre 2012, 15 h UTC (unité : Pa.s^{-1}).

La texture des variances de (ζ, η_u) semble être le paramètre qui détermine l'intensité du spin-up, et ce indépendamment des options de balance utilisées :

- variances brutes, le spin-up est important ($\sim 10,5 \text{ Pa.s}^{-1}$),
- variances filtrées spatialement (avec ou sans support compact de \mathcal{H}), le spin-up est plus faible ($\sim 6,5 \text{ Pa.s}^{-1}$),
- variances moyennées spatialement (climatologiques ou non), le spin-up est encore réduit ($\sim 5 \text{ Pa.s}^{-1}$).

Cette dépendance assez prononcée du spin-up à l'hétérogénéité de ζ et η_u suggère que le celui-ci est induit par l'amplitude et la forme des incréments de vent, qui sont elles-mêmes contrôlées en grande partie par les innovations de vent d'une part, et par les variances de ζ et η_u d'autre part. Cette interprétation semble soutenue par le fait que le niveau de spin-up est bien lié à l'hétérogénéité des variances de ζ et η_u , de façon indépendante des options de balances utilisées.

Il peut en outre paraître contre-intuitif de constater que le spin-up soit toujours du même ordre, que la balance soit active ou non (matrice $\bar{\mathbf{B}}$ multivariée ou univariée). En l'absence de balance, on s'attendrait en effet à ce que les champs de vent et de masse soient moins bien équilibrés, augmentant le spin-up. Ceci suggère donc que les opérateurs de balance utilisés sont potentiellement peu efficaces pour améliorer l'équilibre de l'incrément, d'autant que le domaine AROME étant densément observé, l'incrément pourrait être bien équilibré même en l'absence d'opérateur de balance, ce qui a été illustré dans Fisher *et al.* (2009) pour un modèle global.

Scores

De façon générale, on évalue les analyses et prévisions réalisées par les différentes configurations face à une référence (observations ou analyse indépendante). Deux types de quantités sont calculés : des biais et des scores dont la valeur est toujours positive pour les cas qui nous intéressent. Pour pouvoir comparer efficacement les différentes configurations, on choisit une configuration de référence, ici celle se basant sur les variances climatologiques ("Climatological var.").

On compare alors les valeurs absolues des biais de chaque configuration à la valeur absolue du biais de la configuration de référence :

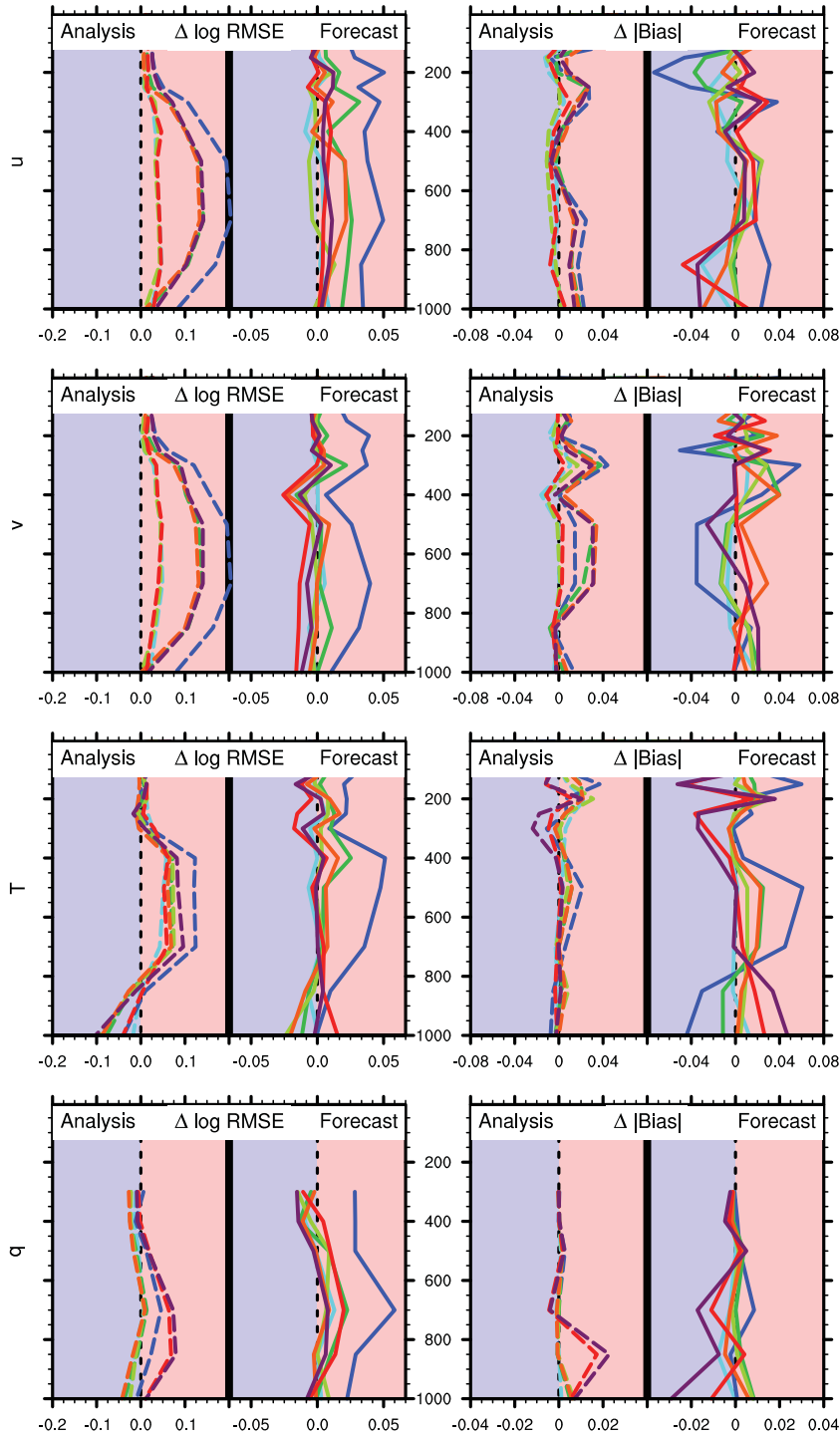
$$\Delta|\text{Biais}| = |\text{Biais}| - |\text{Biais}_{\text{ref}}| \quad (6.12)$$

Pour les autres scores, on effectue la comparaison en normalisant par le score de la configuration de référence :

$$\Delta \log \text{Score} = \frac{\text{Score} - \text{Score}_{\text{ref}}}{\text{Score}_{\text{ref}}} \quad (6.13)$$

Les scores utilisés sont la RMSE, le Heidke skill score (HSS) et le Brier skill score (BSS), ces deux derniers étant décrits dans Amodei et Stein (2009).

Les biais et les scores, moyennés sur les 6 semaines de l'expérience, sont rassemblés dans les pages suivantes pour les prévisions issues du réseau de 0 h UTC. Des scores similaires ont été calculés pour des prévisions issues du réseau de 12 h UTC (non montrés), donnant des résultats cohérents. Les zones bleues y correspondent à une amélioration par rapport à la configuration de référence, et les zones rouges à une dégradation.



Experiments:

— Averaged var.

— Raw var.

— Filtered var.

— Averaged/filtered var.

— Filtered var.-CoSu

— Averaged var.-univariate

— Filtered var.-univariate

Figure 6.23. — Variations relatives de RMSE et variations de biais pour les analyses et les prévisions à 3 h d'échéance comparées aux radiosondages de vent zonal (u), de vent méridien (v), de température (T) et d'humidité spécifique (q , en g.kg^{-1}).

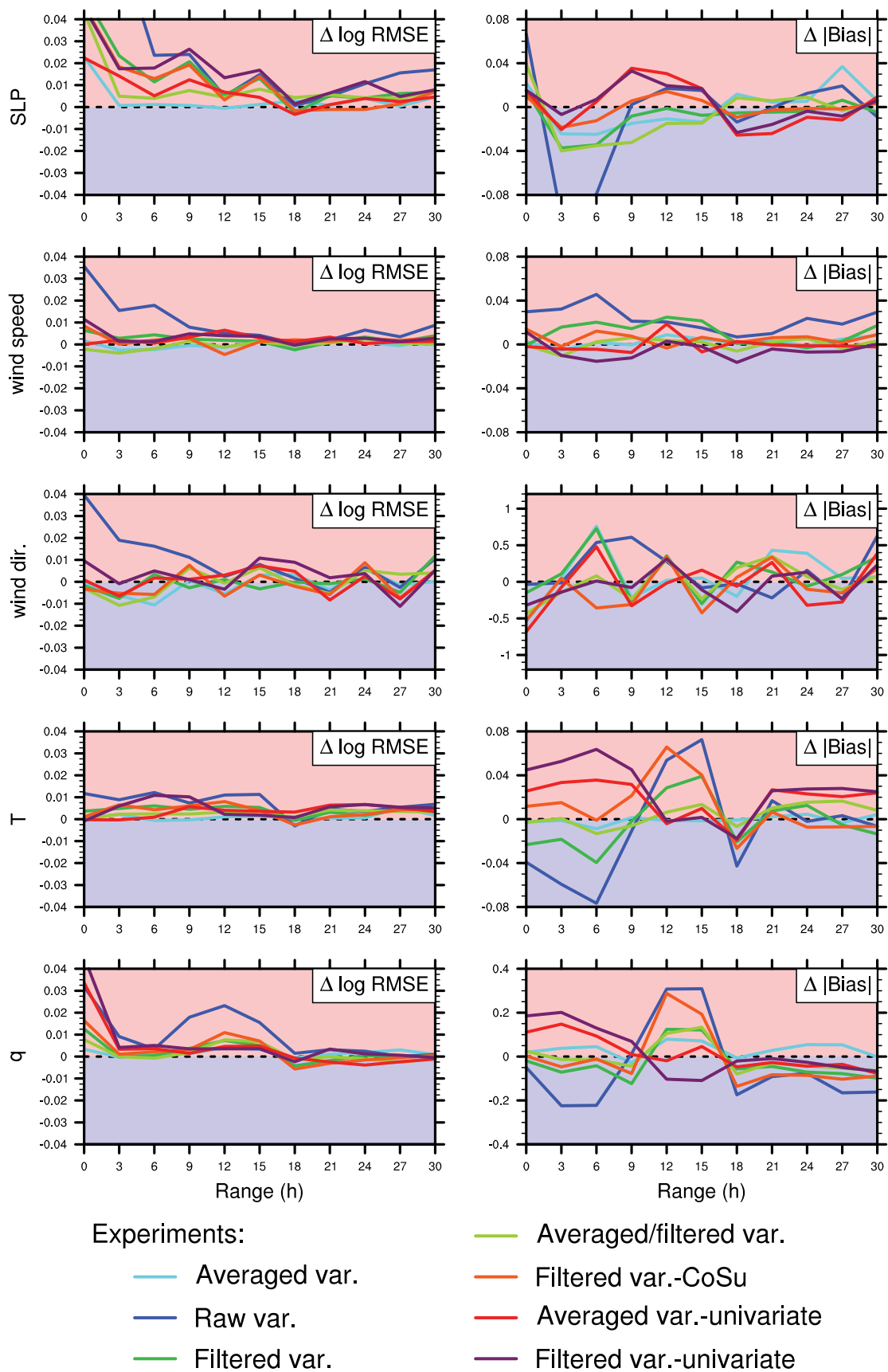


Figure 6.24. – Variations relatives de RMSE et variations de biais pour les analyses et les prévisions jusqu'à 30 h d'échéance issue de l'analyse de 0 h UTC, comparées aux observations de surface de pression ramenée au niveau de la mer (SLP), de force du vent, de direction du vent, de température (T) et d'humidité spécifique (q , en g.kg^{-1}).

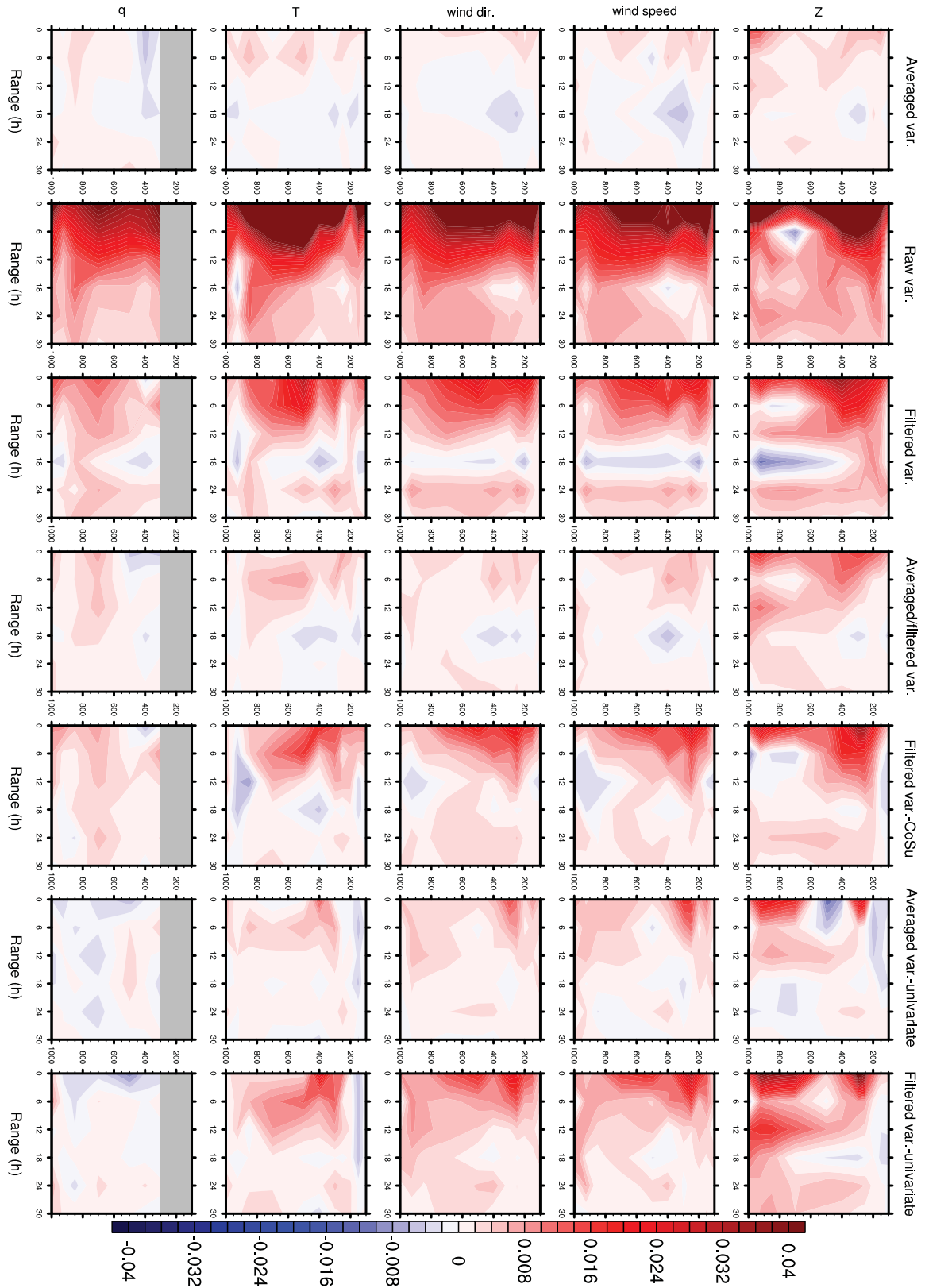


Figure 6.25. – Variations relatives de RMSE pour les analyses et les prévisions jusqu'à 30 h d'échéance issue de l'analyse de 0 h UTC, comparées aux analyses du CEPMMT de géopotentiel (Z), de force du vent, de direction du vent, de température (T) et d'humidité spécifique (q).

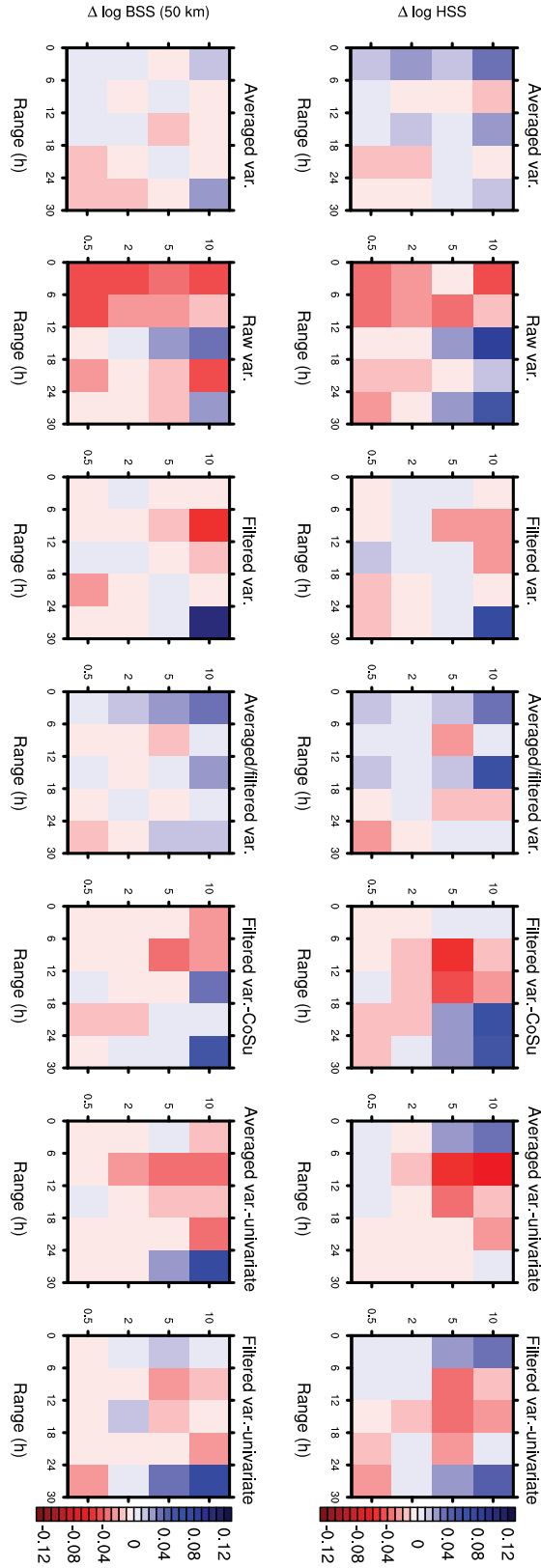


Figure 6.26. — Variations relatives de Heidke skill score (HSS) et de Brier skill score sur un voisinage de 50 km (BSS) pour les cumuls de précipitation sur 6 h, pour les analyses et les prévisions jusqu'à 30 h d'échéance issue de l'analyse de 0 h UTC, comparées aux observations.

Globalement, on constate que l’apport des variances du jour et de leurs variations spatiales est neutre à négatif pour les prévisions du modèle AROME. Les scores sont généralement dégradés pour l’analyse et les premières échéances, puis retournent à un état neutre à plus longue échéance. Les rares améliorations constatées sont passagères, peu significatives, et parfois difficiles à recouper entre les différents scores.

Cependant, plusieurs tendances semblent se dégager, qui ne sont valables que dans le cadre expérimental présenté :

1. La comparaison des analyses aux données de radiosondages pour le vent (figure 6.23) fait ressortir les trois groupes de configurations déjà présents dans la figure 6.22 pour le spin-up. Ceci indique que plus la texture des variances de ζ et η_u est de petite échelle, plus l’incrément est de grande amplitude (figures 6.18 à 6.21), mais qu’il ne se rapproche pas davantage des observations, bien au contraire. Cet aspect n’est plus visible pour les prévisions dès 3 h d’échéance, mais il va dans le sens des remarques sur les incréments de vent et sur l’étude du spin-up.
2. Les configurations “Climatological var.” et “Averaged var.” donnent des scores proches. La seconde montre toutefois de légères améliorations pour le vent par rapport aux observations de surface (figure 6.24), ainsi que l’après-midi par rapport aux analyses du CEPMMT (figure 6.25) pour le réseau de 0 h UTC. Les scores aux précipitations sont eux aussi améliorés jusqu’à 18 h d’échéance.
3. La configuration “Averaged/filtered var.” a de meilleurs scores que “Filtered var.”. Les fortes dégradations de cette dernière configuration par rapport aux analyses du CEPMMT avant 12 h d’échéance en particulier sont fortement estompées. Ceci confirme l’impact négatif des variances hétérogènes pour le couple (ζ, η_u) , esquissé par les modifications importantes des covariances multivariées qui en résultent (première section de ce chapitre), des incréments de vent (figure 6.21) et par une augmentation du spin-up (figure 6.22). Cependant, cette configuration a aussi des scores légèrement moins bons que “Averaged var.”. Cela semble indiquer que les variances hétérogènes de T_u et q_u n’ont pas non plus d’impact positif par rapport à des variances homogènes, même si la dégradation est moins marquée qu’avec les variances hétérogènes de ζ et η_u .
4. Cet impact négatif des variances hétérogènes pour le couple (ζ, η_u) est également confirmé par la nette dégradation de la configuration “Filtered var.-univariate” par rapport à “Averaged var.-univariate”, qui est globalement plus marquée en vent qu’en température. Cette comparaison confirme également le fait que l’hétérogénéité du couple (ζ, η_u) semble poser problème pour le vent horizontal, indépendamment des options de balance utilisées.
5. La configuration “Filtered var.-CoSu” n’est pas significativement meilleure que la configuration “Filtered var.” (meilleure pour les scores de RR6 l’après-midi, mais moins bonne pour les autres). Comme on a pu le constater sur la figure 6.3, l’effet du support compact de l’opérateur \mathcal{H} est bien visible, puisqu’il permet de limiter la portée parfois trop longue des covariances, mais pas leur amplitude excessive quand les variances spécifiées sont trop hétérogènes.
6. La configuration “Raw var.” donne comme prévu les moins bons scores, et son spin-up est très fort. Cela confirme le risque d’utiliser des variances brutes pour les variables non balancées dans la modélisation de la matrice $\bar{\mathbf{B}}$, le filtrage étant nécessaire pour de petits ensembles.
7. Les configurations “Averaged var.-univariate” et “Filtered var.-univariate” donnent des résultats contrastés, mais on peut noter qu’ils sont du même ordre que ceux des configurations “Averaged var.” et “Filtered var.”, respectivement. D’une part, cela signifie

que les interactions entre balances spectrales et variances dans l'espace physique ne sont pas les seules responsables de la dégradation des scores lorsque les variances deviennent hétérogènes. D'autre part, cela semble indiquer que les scores de prévision sont faiblement sensibles à l'action des opérateurs de balance, comme l'avaient observé Fisher *et al.* (2009) pour un modèle global dans des zones densément observées. Enfin, on note une bonne tenue des scores d'humidité jusqu'à 12 h d'échéance par rapport aux analyses du CEPMMT. À l'échelle convective et pour la période considérée, l'utilisation de balances statiques pour l'humidité spécifique semble sous-optimale, principalement car l'intensité des couplages de l'humidité avec les autres paramètres dépend grandement de la présence ou non de nuages et de précipitations. Montmerle et Berre (2010) ont par exemple montré de fortes variations dans le couplage entre divergence et humidité spécifique selon que la zone est précipitante ou non. De même, on trouve dans la figure 6 de Ménétrier et Montmerle (2011) de grandes disparités dans le couplage entre température et humidité spécifique selon que la zone est couverte de brouillard ou non. Le signe des couplages entre température et humidité spécifique change selon que l'humidité relative de l'atmosphère est plutôt élevée ou faible, comme le montrent Andersson *et al.* (2005) et Hólm *et al.* (2002).

6.3. Conclusions

Ce chapitre évalue l'introduction de variances hétérogènes issues d'un ensemble dans le modèle de covariances d'erreur d'ébauche utilisé dans le 3D-Var AROME. Ces variances sont filtrées spatialement pour limiter le bruit d'échantillonnage suivant l'algorithme développé et validé dans les chapitres précédents. Elles sont ensuite insérées dans la matrice $\bar{\mathbf{B}}$ spectrale d'AROME, les autres opérateurs décrivant les corrélations spatiales et la balance restant inchangés.

Le diagnostic de la matrice $\bar{\mathbf{B}}$ ainsi modélisée a montré que l'inclusion de variances hétérogènes pouvait altérer significativement la portée des covariances, et augmenter fortement le poids donné à sa composante multivariée. Le filtrage objectif des variances permet de réduire ces artefacts. Toutefois, rien ne permet de s'assurer que ce filtrage, optimal au sens de la section 3.2 (minimisation de l'espérance de la norme euclidienne au carré par rapport au signal "vrai") soit également optimal au sens où il permettrait une modélisation plus pertinente des covariances totales de $\bar{\mathbf{B}}$. Ainsi, même en utilisant les variances filtrées, la matrice $\bar{\mathbf{B}}$ totale n'est que faiblement dépendante de l'écoulement, et diffère nettement des covariances échantillonnées directement à partir du grand ensemble.

Il est sans doute possible d'améliorer la modélisation de la matrice $\bar{\mathbf{B}}$ hétérogène. Les portées excessives peuvent être en partie corrigées par l'application de l'opérateur \mathcal{H} à support compact, au prix de l'ajout de paramètres arbitraires (la longueur du support compact). Une autre piste pourrait être d'améliorer la formulation de la balance. En effet, une partie du signal semble provenir de la projection de la variabilité spatiale des variances dans l'espace spectral, notamment au niveau des balances. Un autre couple de variables dynamiques pourrait être recherché pour représenter le vent horizontal. Au vu des effets des variances de ζ et η_u (de façon quasi-indépendante des options de balance utilisées) sur les incréments de vent, sur le spin-up et sur les scores, un autre couple de variables dynamiques pourrait être recherché pour représenter les erreurs sur le vent horizontal. Ainsi, plusieurs centres de prévision numérique utilisent la fonction de courant et le potentiel de vitesse dans leur variable de contrôle (Met Office : Lorenc *et al.* (2000)). Pour ce qui est des balances, une formulation basée sur des régressions dans l'espace physique pourrait être considérée (WRF : Barker *et al.* (2004), NCEP :

Wu *et al.* (2002)), avec l'avantage de pouvoir introduire des variations géographiques mais au détriment cependant de la dépendance des couplages multivariés aux différentes échelles spatiales en jeu.

L'inclusion de cette matrice $\bar{\mathbf{B}}$ dans le 3D-Var AROME donne des résultats décevants. Une première étude (Brousseau *et al.*, 2011) conduite avec un système similaire au nôtre et utilisant une matrice $\bar{\mathbf{B}}$ homogène avait montré qu'un impact positif important était obtenu en améliorant la qualité générale de l'ensemble utilisé pour calibrer un cette matrice sur une période de deux semaines (passage du mode "spin-up" au mode "assimilation d'ensemble"). Une seconde (Brousseau *et al.*, 2012) avait montré que l'utilisation de covariances du jour avait un impact positif, mais très limité par rapport à des covariances climatologiques calibrées sur la période de deux semaines. Dans notre cas, où les variances seules sont calibrées à chaque cycle, mais où les corrélations et les balances restent statiques, il semble que cette légère amélioration n'ait plus lieu. La calibration des opérateurs successifs de $\bar{\mathbf{B}}$ à partir de données différentes signifie que les phénomènes physiques échantillonnés ne sont pas les mêmes, surtout pour un modèle à aire limitée. Ceci pourrait dégrader la cohérence des covariances totales modélisées.

La matrice $\bar{\mathbf{B}}$ utilisant des variances hétérogènes permet d'inclure de l'information issue de l'ensemble AEARO dans le 3D-Var. Un certain nombre de développements autour de l'AEARO sont récents et spécifiques à l'échelle convective (ex. : perturbation des observations radar, inflation). Leur évaluation doit encore être poursuivie, en complément des questions posées sur la formulation interne de la matrice $\bar{\mathbf{B}}$ modélisée, qui pour l'instant diffère sensiblement d'une matrice $\tilde{\mathbf{B}}$ échantillonnée.

Conclusions et perspectives

La problématique du bruit d'échantillonnage dans l'estimation des covariances d'erreur d'ébauche est transverse à toutes les méthodes d'ensemble. À échelle convective, les forts gradients et les fortes anisotropies rendent le filtrage de ces covariances encore plus délicat. Dans ce contexte, cette thèse a permis de développer des solutions de filtrage des variances et de localisation des covariances robustes et peu coûteuses.

Le premier chapitre de cette thèse a permis de présenter les fondements théoriques de l'assimilation de données. L'importance des covariances d'erreur d'ébauche et la pertinence des méthodes d'ensemble ont été particulièrement mises en relief.

Dans le second chapitre, basé sur l'article publié Ménétrier *et al.* (2014a), une assimilation d'ensemble de grande taille a permis de documenter les covariances d'erreur d'ébauche pour le 3D-Var du modèle à échelle convective AROME. Leur forte dépendance à la situation météorologique, déjà montrée par Montmerle et Berre (2010) et Brousseau *et al.* (2012), a été confirmée, ce qui montre l'intérêt de considérer des covariances dépendantes de l'écoulement. La taille de l'ensemble a aussi permis de constater et de quantifier les effets du sous-échantillonnage en estimant des covariances à partir de sous-ensembles indépendants de moindre taille. Tous ces diagnostics ont été comparés pour AROME et pour le modèle global ARPEGE. Comme attendu, les fortes différences des modèles et de leurs systèmes d'assimilation respectifs, principalement liées à leurs résolutions, sont à l'origine de différences notables dans les résultats, même si certaines structures de grande échelle communes ont pu être identifiées. Des structures de variances de plus forte amplitude et de plus fine échelle, notamment pour la vorticité et la divergence non balancée, ainsi que des corrélations locales bien plus anisotropes ont été montr es en particulier. Ces corrélations horizontales sont par exemple plus courtes sur les reliefs et dans les zones précipitantes que sur la mer, le tenseur LCH montrant des allongements plus ou moins marqués le long de l'écoulement, ainsi qu'une forte dépendance aux champs coupleurs sur les bords du domaine.

Les bases théoriques de l'estimation de moments centrés à partir d'un échantillon, ainsi que celles du filtrage linéaire optimal, ont ensuite été rappel es dans le troisième chapitre. Ceci a permis la démonstration de l'existence de critères d'optimalité d'un filtre linéaire ou d'un filtre de Schur appliqués à des covariances  chantillonn es. L'idée principale qui sous-tend ces critères est que l'on ne filtre pas n'importe quelle quantité, mais des covariances  chantillonn es, pour lesquelles le bruit d'échantillonnage a des propriétés statistiques connues. Ces critères ne sont basés que sur des quantités connues ou estimables de façon robuste, ce qui constitue leur principal avantage. Un autre intérêt vient de l'absence d'hypothèse d'ergodicité dans la théorie générale, celle-ci n'étant nécessaire qu'en dernière étape, et donc modulable selon les besoins de l'application. Le quatrième chapitre a présenté deux applications directes de ces critères d'optimalité, historiquement distinctes : le filtrage spatial des variances et la localisation des covariances. Une étape d'illustration a permis de valider conceptuellement ces applications dans un cadre idéalisé. L'utilisation des critères précédents pour le filtrage des variances a permis de garantir la positivité des variances filtrées au prix d'une légère sous-optimalité du filtrage. Les fonctions de localisation diagnostiqu es par les nouvelles formules ont bien répondu aux attentes quant à leur adaptation à la taille de l'ensemble. Les paramètres impor-

tants du problème et leur impact sur la qualité du filtrage des variances ou de la localisation des covariances ont ainsi pu être mis en relief. Tous ces résultats ont été récemment soumis (Ménétrier *et al.*, 2014b).

Le cinquième chapitre rassemble les résultats principaux de l'application des critères d'optimalité pour le filtrage des variances et des tenseurs LCH, ainsi que pour la localisation de covariances dans un contexte de prévision numérique du temps. Un article a également été soumis à ce sujet (Ménétrier *et al.*, 2014c), en complément du précédent. L'ensemble AROME développé pour le diagnostic des covariances d'erreur d'ébauche a également permis de tester ces applications, et de les évaluer objectivement pour le filtrage des variances et des tenseurs. Il en ressort que le critère général 4.7 permet d'obtenir un filtrage homogène quasi optimal pour toutes les variables et tous les niveaux, dans le sens où il fournit la meilleure longueur de filtrage possible une fois la forme du noyau choisi. Sa version simplifiée en supposant que la distribution de l'ensemble est gaussienne fonctionne bien pour les variables vérifiant cette hypothèse (température et humidité spécifique non balancées), mais a tendance à largement sous-filtrer la vorticité et la divergence non balancée, du fait de leur forte non-gaussianité. Ces filtres itératifs semblent se comporter de manière plus robuste que le filtre adapté de Raynaud *et al.* (2009), en particulier pour la vorticité et la divergence non-balancée, tout en étant faciles à implémenter et à maintenir. Le filtrage des tenseurs LCH est apparu comme un prolongement naturel du filtrage des variances, plusieurs méthodes étant propos es pour filtrer le terme croisé. Cependant, le filtrage obtenu n'est pas optimal, particulièrement pour les petits ensembles, en raison d'une violation de l'hypothèse initiale d'indépendance des membres dans le calcul des covariances. Les tenseurs échantillonnés à partir d'un ensemble réduit sont toutefois bien plus proches de la référence après cette étape de filtrage. Le diagnostic de fonctions de localisation horizontales et verticales a montré une bonne cohérence avec la situation physique, ainsi qu'avec la taille de l'ensemble.   notre connaissance, il s'agit de la première méthode permettant une estimation objective de la localisation à partir de l'ensemble lui-même, et qui soit adapt e aux grandes dimensions des modèles de prévision numérique du temps. Cette méthode pourrait être exploit e dans de nombreux systèmes d'assimilation basés sur des ensembles, de types EnKF ou EnVar, où ces fonctions de localisation sont encore largement empiriques.

Dans un dernier chapitre, l'impact de l'introduction de variances hétérogènes  chantillonn es par une assimilation d'ensemble (et potentiellement filtrées) dans un modèle de covariance a été évalué à la fois sur les covariances totales modélisées et sur les scores des prévisions subséquentes. Une première étape de diagnostic des covariances ainsi modélisées a mis en lum re l'impact considérable des variances hétérogènes sp cifi es sur la structure et l'amplitude des covariances modélisées. On a montré que l'utilisation de variances brutes conduisait à des fonctions de covariance particulièrement bruit es. Le filtrage des variances permet de réduire ces effets, notamment pour s'approcher des covariances modélisées en utilisant des variances provenant d'un grand ensemble (et donc peu affect es par le bruit d'échantillonnage). Malgré tout, cette modélisation des covariances d'erreur d'ébauche ne permet pas de représenter de manière satisfaisante les covariances  chantillonn es par un ensemble de grande taille. En plus de ces études diagnostiques, l'introduction des variances issues d'un ensemble de 6 membres a été test e pendant plus de 6 semaines dans le 3D-Var du modèle AROME. Cette expérience a permis d'une part de montrer la robustesse des filtres itératifs développés précédemment et leur dépendance à l'écoulement, et d'autre part d'évaluer l'apport de l'utilisation des variances estim es par l'ensemble pour l'analyse et la prévision. L'absence d'impact positif lors de l'utilisation de variances hétérogènes, les expériences bas es sur des variances homogènes pour la vorticité et la divergence, ainsi que les expériences men es avec ou sans opérateur de balance, soulèvent de nombreuses questions, aucune des pistes  voqu es n'étant *a priori* responsable

à elle seule des impacts négatifs. Bien qu'elle permette d'introduire de l'information issue de l'ensemble, la modélisation utilisée actuellement pour les covariances d'erreur d'ébauche devra être revisitée afin d'obtenir la dépendance à la situation météorologique souhaitée, et à terme un impact positif dans le système d'analyse et de prévision.

La non-spécificité des méthodes développées vis-à-vis d'un modèle ou d'un système d'assimilation permet d'imaginer de nombreuses applications dans la communauté ensembliste. Le coût de calcul raisonnable de ces méthodes les rend accessibles dans des systèmes opérationnels. Plus spécifiquement, le filtrage des variances peut être envisagé dans les algorithmes de type EnKF ou EnVar : la normalisation des perturbations de l'ensemble par le ratio des écarts-types filtrés et bruts permet en effet de rendre les variances de l'ensemble ainsi normalisé égales aux variances filtrées. Comme il s'agit d'une multiplication point à point, les effets de cette normalisation sur les balances de l'ensemble devront être étudiés avec soin. Pour les tenseurs LCH, le filtrage objectif (quoique non optimal) devrait permettre une meilleure précision des modèles de corrélation utilisant ces tenseurs. On peut penser d'une part aux modèles océanographiques pour lesquels la complexité des frontières du domaine encourage une modélisation des corrélations par diffusion (Mirouze et Weaver, 2010), et d'autre part à des approches utilisant les tenseurs pour déformer la grille et rendre les covariances quasi homogènes (Michel, 2012a,b). L'estimation des localisations horizontale et verticale par la nouvelle méthode basée sur l'ensemble doit encore faire ses preuves dans un schéma d'assimilation réaliste, et être confrontée aux autres méthodes existantes, mais les premiers tests engagés semblent prometteurs.

L'introduction de variances déduites d'un ensemble dans un modèle de covariances d'erreur d'ébauche à l'échelle convective se heurte quant à elle à des difficultés importantes, telle qu'elle est implémentée actuellement. Cette utilisation semble en effet conduire à des effets neutres à négatifs sur les scores, tandis que les différences avec les covariances issues d'un grand ensemble restent significatives. Plusieurs pistes pourraient être envisagées afin d'améliorer cette situation. Cela pourrait comprendre l'utilisation de variables dynamiques de plus grande échelle que la vorticité et la divergence, dont les effets sur le spin-up, sur les incréments de vent et sur les scores ont été mis en évidence. Une autre source d'améliorations pourrait être une modification de la calibration des balances, qui pourrait être faite de façon dépendante à la situation via l'ensemble. La formulation des balances à l'échelle convective pourrait aussi être revisitée, par exemple en comparant des formulations en spectral, en ondelettes ou dans l'espace physique. Il serait également bénéfique de mieux tenir compte de certaines spécificités des balances à l'échelle convective (Pagé *et al.*, 2007; Vetra-Carvalho *et al.*, 2012). L'approche hétérogène par masques géographiques de Montmerle et Berre (2010) et Ménétrier et Montmerle (2011) permettrait aussi de conserver la cohérence des covariances modélisées. Enfin, l'utilisation d'une fonction c  t hybride pourrait permettre de conserver le formalisme variationnel et ses points forts, tout en incluant de façon plus explicite des covariances d'erreur d'ébauche issues d'un ensemble. Les solutions de filtrage des covariances apport es par cette thèse pourraient s'avérer fructueuses au sein de cette approche, qui semble prometteuse.

A | Annexes

Sommaire

A.1 Tenseurs de la hessienne de la corrélation locale (LCH)	159
A.1.1 Définitions générales	159
A.1.2 Estimation dans le cas continu	161
A.1.3 Estimation dans le cas discret	163
A.2 Estimation des moments centrés : théorie et pratique	164
A.2.1 Dérivation des moments dans la théorie de Wishart	164
A.2.2 Nouvel estimateur des covariances	164
A.2.3 Espérance et covariance de $\tilde{\mathbf{B}}$	165
A.2.4 Espérance de $\tilde{\Xi}$	167
A.2.5 Formule d'estimation itérative des moments centrés	168
A.2.6 Calcul itératif du moment centré d'ordre quatre multivarié	170
A.3 Théorie du filtrage linéaire optimal	171
A.3.1 Changement de base du filtre optimal	171
A.3.2 Diagonalisation du gain du filtre optimal	171
A.4 Filtrage linéaire optimal des covariances	173
A.4.1 Moments centrés aléatoires	173
A.4.2 Critères de filtrage linéaire optimal des covariances	174
A.4.3 Unicité des critères de filtrage des variances	176
A.5 Longueur de portée d'une fonction hypergaussienne	177
A.6 Propriétés de l'inflation estimée	178

A.1. Tenseurs de la hessienne de la corrélation locale (LCH)

A.1.1. Définitions générales

Tenseur

On se place dans l'espace physique à d dimensions, où le vecteur \mathbf{r} de taille d contient les coordonnées :

$$\mathbf{r} = (x_1, \dots, x_d)^T \quad (\text{A.1})$$

Soit $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ une fonction de corrélation entre les lieux \mathbf{r} et \mathbf{r}' , que l'on suppose deux fois dérivable. Le tenseur de la hessienne de la corrélation locale (tenseur LCH) est défini dans Weaver et Mirouze (2012) par :

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}} \nabla_{\mathbf{r}'}^T C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} \quad (\text{A.2})$$

Il s'agit d'une matrice de taille $d \times d$, contenant en chaque point \mathbf{r} les dérivées secondes de la fonction $b(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ par rapport à \mathbf{r} et \mathbf{r}' . La composante d'indices (α, β) de $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ vaut :

$$H_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial^2 C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x_{\alpha} \partial x'_{\beta}} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} \quad (\text{A.3})$$

D'après le théorème de Schwarz, les dérivées partielles commutent, donc le tenseur est symétrique :

$$H_{\beta\alpha}(\mathbf{r}) = H_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \quad (\text{A.4})$$

Le point $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ est un point critique de la fonction de corrélation, où son gradient s'annule. Comme il s'agit d'un maximum, la matrice hessienne est définie négative (théorie de Morse), et le tenseur LCH est donc défini positif.

Longueur de portée

La longueur de portée est définie dans Daley (1991) pour une fonction homogène et isotrope $\bar{C}(\Delta r)$ avec $\Delta r = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$ par :

$$\mathcal{L}_{\text{Daley}}^b = \sqrt{-\frac{d}{\nabla^2 \bar{C}|_{\Delta r=0}}} \quad (\text{A.5})$$

Une généralisation pour les fonctions hétérogènes et anisotropes est donnée dans Ménétrier *et al.* (2014a), à l'aide du tenseur LCH. Ce tenseur étant défini positif, il peut être diagonalisé dans une base de vecteurs propres \mathbf{e}_γ orthonormaux, correspondant aux valeurs propres λ_γ , strictement positives. Dans chaque direction \mathbf{e}_γ , on peut définir une longueur de portée partielle :

$$\mathcal{L}_\gamma^b = \lambda_\gamma^{-1/2} \quad (\text{A.6})$$

La longueur de portée totale peut être définie comme la moyenne géométrique des longueurs de portée partielles :

$$\mathcal{L}^b = \left(\prod_{\gamma=1}^d \mathcal{L}_\gamma^b \right)^{1/d} = \det(\mathbf{H})^{-1/(2d)} \quad (\text{A.7})$$

Ainsi, la longueur de portée totale est telle que la sphère de rayon \mathcal{L}^b a le même volume que l'ellipsoïde défini par les semi-axes \mathcal{L}_γ^b . Dans un cas 2D, il est possible de représenter les tenseurs LCH par des ellipses dont les directions principales sont les vecteurs propres \mathbf{e}_γ et les semi-axes les longueurs de portée partielles \mathcal{L}_γ^b .

Dans le cas d'une fonction homogène et isotrope :

$$\frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x_\alpha \partial x'_\beta} \Big|_{\Delta r=0} = \begin{cases} -D^{-2} & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

où D est une constante positive ayant la dimension physique d'une distance. La longueur de portée au sens de l'équation A.7 vaut donc :

$$\mathcal{L}^b = \left((D^{-2})^d \right)^{-1/(2d)} = D \quad (\text{A.9})$$

tandis que la longueur de portée selon Daley (1991) vaut :

$$\mathcal{L}_{\text{Daley}}^b = \sqrt{\frac{d}{d \times D^{-2}}} = D \quad (\text{A.10})$$

Les deux formulations sont donc équivalentes dans le cas homogène et isotrope.

A.1.2. Estimation dans le cas continu

L'objectif de cette section est d'exprimer les composantes des tenseurs LCH en utilisant uniquement l'erreur d'ébauche $\varepsilon^b(\mathbf{r})$ et son écart-type $\sigma^b(\mathbf{r})$, et non plus la fonction de corrélation $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$.

Méthode de Belo Pereira et Berre (2006)

Par définition de la fonction de covariance $B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbb{E}[\varepsilon^b(\mathbf{r})\varepsilon^b(\mathbf{r}')]$, on a :

$$B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sigma^b(\mathbf{r})\sigma^b(\mathbf{r}')C(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (\text{A.11})$$

La dérivée seconde de $B(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ par rapport à x_α et x'_β est :

$$\frac{\partial^2 B(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x_\alpha \partial x'_\beta} = \mathbb{E} \left[\frac{\partial \varepsilon^b(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \varepsilon^b(\mathbf{r}')}{\partial x'_\beta} \right] \quad (\text{A.12})$$

Celle de $\sigma^b(\mathbf{r})\sigma^b(\mathbf{r}')C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ vaut :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x'_\beta} (\sigma^b(\mathbf{r})\sigma^b(\mathbf{r}')C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) &= \frac{\partial \sigma^b(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \sigma^b(\mathbf{r}')}{\partial x'_\beta} C(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{\partial \sigma^b(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} \sigma^b(\mathbf{r}') \frac{\partial C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x'_\beta} \\ &+ \sigma^b(\mathbf{r}) \frac{\partial \sigma^b(\mathbf{r}')}{\partial x'_\beta} \frac{\partial C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x_\alpha} + \sigma^b(\mathbf{r})\sigma^b(\mathbf{r}') \frac{\partial^2 C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x_\alpha \partial x'_\beta} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

mais en $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$:

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 1 \quad (\text{A.14a})$$

$$\nabla C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} = 0 \quad (\text{A.14b})$$

d'où :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x'_\beta} (\sigma^b(\mathbf{r})\sigma^b(\mathbf{r}')C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} = \frac{\partial \sigma^b(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \sigma^b(\mathbf{r})}{\partial x_\beta} + \sigma^b(\mathbf{r})^2 \frac{\partial^2 C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x_\alpha \partial x'_\beta} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} \quad (\text{A.15})$$

En combinant les équations A.11, A.12 et A.15, la composante d'indices (α, β) du tenseur vaut :

$$H_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \sigma^b(\mathbf{r})^{-2} \left(\mathbb{E} \left[\frac{\partial \varepsilon^b(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \varepsilon^b(\mathbf{r})}{\partial x_\beta} \right] - \frac{\partial \sigma^b(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \sigma^b(\mathbf{r})}{\partial x_\beta} \right) \quad (\text{A.16})$$

Méthode de Michel (2012b)

La dérivée spatiale de l'erreur d'ébauche normalisée par son écart-type vaut :

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\varepsilon^b(\mathbf{r})}{\sigma^b(\mathbf{r})} \right) = \frac{1}{\sigma^b(\mathbf{r})} \frac{\partial \varepsilon^b(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} - \frac{\varepsilon^b(\mathbf{r})}{\sigma^b(\mathbf{r})^2} \frac{\partial \sigma^b(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} \quad (\text{A.17})$$

Comme l'espérance et les dérivations spatiales commutent, l'absence de biais de l'erreur d'ébauche $\mathbb{E}[\varepsilon^b(\mathbf{r})] = 0$ implique que :

$$\mathbb{E}[\nabla \varepsilon^b(\mathbf{r})] = 0 \quad (\text{A.18})$$

La quantité de l'équation A.17 est donc d'espérance nulle :

$$\mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\varepsilon^b(\mathbf{r})}{\sigma^b(\mathbf{r})} \right) \right] = \frac{1}{\sigma^b(\mathbf{r})} \mathbb{E} \left[\frac{\partial \varepsilon^b(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} \right] - \frac{\mathbb{E}[\varepsilon^b(\mathbf{r})]}{\sigma^b(\mathbf{r})^2} \frac{\partial \sigma^b(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (\text{A.19})$$

On a donc :

$$\begin{aligned} & \text{Cov} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\varepsilon^b(\mathbf{r})}{\sigma^b(\mathbf{r})} \right), \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{\varepsilon^b(\mathbf{r})}{\sigma^b(\mathbf{r})} \right) \right) \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\varepsilon^b(\mathbf{r})}{\sigma^b(\mathbf{r})} \right) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{\varepsilon^b(\mathbf{r})}{\sigma^b(\mathbf{r})} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{\sigma^b(\mathbf{r})} \frac{\partial \varepsilon^b(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} - \frac{\varepsilon^b(\mathbf{r})}{\sigma^b(\mathbf{r})^2} \frac{\partial \sigma^b(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} \right) \left(\frac{1}{\sigma^b(\mathbf{r})} \frac{\partial \varepsilon^b(\mathbf{r})}{\partial x_\beta} - \frac{\varepsilon^b(\mathbf{r})}{\sigma^b(\mathbf{r})^2} \frac{\partial \sigma^b(\mathbf{r})}{\partial x_\beta} \right) \right] \\ &= \sigma^b(\mathbf{r})^{-2} \left(\mathbb{E} \left[\frac{\partial \varepsilon^b(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \varepsilon^b(\mathbf{r})}{\partial x_\beta} \right] + \sigma^b(\mathbf{r}) \frac{\partial \sigma^b(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \sigma^b(\mathbf{r})}{\partial x_\beta} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial \sigma^b(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} \mathbb{E} \left[\varepsilon^b(\mathbf{r}) \frac{\partial \varepsilon^b(\mathbf{r})}{\partial x_\beta} \right] - \frac{\partial \sigma^b(\mathbf{r})}{\partial x_\beta} \mathbb{E} \left[\varepsilon^b(\mathbf{r}) \frac{\partial \varepsilon^b(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

On utilise le fait que :

$$\mathbb{E} \left[\varepsilon^b(\mathbf{r}) \frac{\partial \varepsilon^b(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} \right] = \mathbb{E} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon^b(\mathbf{r})^2}{\partial x_\alpha} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma^b(\mathbf{r})^2}{\partial x_\alpha} = \sigma^b(\mathbf{r}) \frac{\partial \sigma^b(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} \quad (\text{A.21})$$

Pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \text{Cov} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\varepsilon^b(\mathbf{r})}{\sigma^b(\mathbf{r})} \right), \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{\varepsilon^b(\mathbf{r})}{\sigma^b(\mathbf{r})} \right) \right) \\ &= \sigma^b(\mathbf{r})^{-2} \left(\mathbb{E} \left[\frac{\partial \varepsilon^b(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \varepsilon^b(\mathbf{r})}{\partial x_\beta} \right] - \frac{\partial \sigma^b(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \sigma^b(\mathbf{r})}{\partial x_\beta} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Ainsi, la composante d'indices (α, β) du tenseur vaut :

$$H_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \text{Cov} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\varepsilon^b(\mathbf{r})}{\sigma^b(\mathbf{r})} \right), \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{\varepsilon^b(\mathbf{r})}{\sigma^b(\mathbf{r})} \right) \right) \quad (\text{A.23})$$

soit sous la forme d'une matrice de covariance :

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \text{Cov} \left(\nabla \left(\frac{\varepsilon^b(\mathbf{r})}{\sigma^b(\mathbf{r})} \right) \right) \quad (\text{A.24})$$

On retrouve ainsi que les tenseurs LCH sont nécessairement définis positifs.

A.1.3. Estimation dans le cas discret

Discrétisation spatiale

Dans le cas discret, les fonctions $\varepsilon(\mathbf{r})$ et $\sigma(\mathbf{r})$ sont remplacées par des vecteurs $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$. La dérivation continue est remplacée par un opérateur linéaire de différentiation \mathbf{D} :

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \rightarrow \mathbf{D}_\alpha \quad (\text{A.25})$$

En notant $H_{\alpha\beta|i}$ la composante d'indices (α, β) du tenseur \mathbf{H} au point d'indice i , les formulations A.16 et A.24 deviennent respectivement :

$$H_{\alpha\beta|i}^{\text{BPB}} = (\sigma_i^b)^{-2} \left(\mathbb{E} \left[(\mathbf{D}_\alpha \boldsymbol{\varepsilon}^b)_i (\mathbf{D}_\beta \boldsymbol{\varepsilon}^b)_i \right] - (\mathbf{D}_\alpha \boldsymbol{\sigma}^b)_i (\mathbf{D}_\beta \boldsymbol{\sigma}^b)_i \right) \quad (\text{A.26a})$$

$$H_{\alpha\beta|i}^{\text{M}} = \text{Cov} \left(\left(\mathbf{D}_\alpha \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^b}{\boldsymbol{\sigma}^b} \right) \right)_i, \left(\mathbf{D}_\beta \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^b}{\boldsymbol{\sigma}^b} \right) \right)_i \right) \quad (\text{A.26b})$$

où le rapport $\boldsymbol{\varepsilon}^b / \boldsymbol{\sigma}^b$ s'entend comme une division terme à terme des vecteurs.

Comme l'opérateur de différentiation n'est plus continu : $\mathbf{H}^{\text{BPB}} \neq \mathbf{H}^{\text{M}}$.

Estimation à partir de l'ensemble

Les deux formulations précédentes peuvent être utilisées pour estimer les tenseurs LCH à partir d'un ensemble de N membres $\{\tilde{\mathbf{x}}_p^b\}_{1 \leq p \leq N}$. En notant Cov_N un estimateur de la covariance par un ensemble de N membres et $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^b$ le vecteur des écarts-types estimés, on obtient :

$$\tilde{H}_{\alpha\beta|i}^{\text{BPB}} = (\tilde{\sigma}_i^b)^{-2} \left(\text{Cov}_N \left((\mathbf{D}_\alpha \tilde{\mathbf{x}}^b)_i, (\mathbf{D}_\beta \tilde{\mathbf{x}}^b)_i \right) - (\mathbf{D}_\alpha \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^b)_i (\mathbf{D}_\beta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^b)_i \right) \quad (\text{A.27a})$$

$$\tilde{H}_{\alpha\beta|i}^{\text{M}} = \text{Cov}_N \left(\left(\mathbf{D}_\alpha \left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}^b}{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^b} \right) \right)_i, \left(\mathbf{D}_\beta \left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}^b}{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^b} \right) \right)_i \right) \quad (\text{A.27b})$$

En général, l'estimation $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^b$ de $\boldsymbol{\sigma}^b$ est biaisée : elle sous-estime $\boldsymbol{\sigma}^b$. Dans le cas où la distribution de $\tilde{\mathbf{x}}^b$ est gaussienne, ce biais est connu :

$$\mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^b] = \sqrt{\frac{2}{N-1}} \frac{\Gamma(\frac{N}{2})}{\Gamma(\frac{N-1}{2})} \boldsymbol{\sigma}^b \quad (\text{A.28})$$

et il est donc possible de le corriger. Dans le cas général, ce biais est inconnu, mais on peut appliquer la correction du cas gaussien en première approximation.

Comme on le précise dans le chapitre 2, les formules d'estimation A.27a et A.27b ne sont pas équivalentes. Dans le premier cas, le caractère défini positif du tenseur estimé n'est pas garanti, alors qu'il l'est dans le second par construction.

A.2. Estimation des moments centrés : théorie et pratique

A.2.1. Dérivation des moments dans la théorie de Wishart

Pour le calcul des moments, il est pratique d'utiliser la formule de Leibniz, qui permet d'exprimer le déterminant d'une matrice \mathbf{A} de taille $n \times n$:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in P_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i\sigma(i)} \quad (\text{A.29})$$

où la somme s'effectue sur l'ensemble P_n des permutations σ du vecteur $(1, 2, \dots, n)$, et où le signe de σ est défini par la parité du nombre de permutations élémentaires pour obtenir σ (pair : 1, impair : -1).

La méthode de calcul des moments est alors la suivante :

1. développement de $\det(\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}\tilde{\mathbf{B}}^*)$ par la formule de Leibniz, en mettant en exergue les termes en Θ_{ij} pertinents (sans oublier que $\Theta_{ji} = \Theta_{ij}$),
2. dérivations successives de ce polynôme, au maximum d'ordre deux en Θ_{ij} ,
3. reconstitution de la dérivation adéquate de la fonction génératrice des moments,
4. annulation de Θ : l'apparition de produits de $\delta_{i\sigma(i)}$ permet d'annuler la quasi-totalité des permutations de P_n , ne laissant que quelques termes.

A.2.2. Nouvel estimateur des covariances

Dans la suite, les entiers $\{i, j\}$ indicent les éléments d'un vecteur donné et les entiers $\{p, q, r\}$ indicent les membres de l'ensemble.

On remarque qu'il est possible d'exprimer :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{i,p}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle &= \tilde{x}_{i,p}^b - \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N \tilde{x}_{i,q}^b \\ &= \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N (\tilde{x}_{i,p}^b - \tilde{x}_{i,q}^b) \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

La somme S_{ij} définie par :

$$S_{ij} = \sum_{p=1}^N (\tilde{x}_{i,p}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle) (\tilde{x}_{j,p}^b - \langle \tilde{x}_j^b \rangle) \quad (\text{A.31})$$

peut donc être transformée en :

$$S_{ij} = \frac{1}{N^2} \sum_{1 \leq p, q, r \leq N} (\tilde{x}_{i,p}^b - \tilde{x}_{i,q}^b) (\tilde{x}_{j,p}^b - \tilde{x}_{j,r}^b) \quad (\text{A.32})$$

En notant que le cas $p = q$ n'apporte aucune contribution dans la somme, on peut exprimer S_{ij} par :

$$S_{ij} = \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{1 \leq p < q \leq N \\ 1 \leq r \leq N}} \left((\tilde{x}_{i,p}^b - \tilde{x}_{i,q}^b)(\tilde{x}_{j,p}^b - \tilde{x}_{j,r}^b) + (\tilde{x}_{i,q}^b - \tilde{x}_{i,p}^b)(\tilde{x}_{j,q}^b - \tilde{x}_{j,r}^b) \right) \quad (\text{A.33})$$

Ceci se factorise en :

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{1 \leq p < q \leq N \\ 1 \leq r \leq N}} (\tilde{x}_{i,p}^b - \tilde{x}_{i,q}^b)(\tilde{x}_{j,p}^b - \tilde{x}_{j,q}^b) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{1 \leq p < q \leq N} (\tilde{x}_{i,p}^b - \tilde{x}_{i,q}^b)(\tilde{x}_{j,p}^b - \tilde{x}_{j,q}^b) \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

On obtient alors le nouvel estimateur de la covariance, parfaitement égal à celui de l'équation 3.5a :

$$\tilde{B}_{ij} = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{1 \leq p < q \leq N} (\tilde{x}_{i,p}^b - \tilde{x}_{i,q}^b)(\tilde{x}_{j,p}^b - \tilde{x}_{j,q}^b) \quad (\text{A.35})$$

A.2.3. Espérance et covariance de $\tilde{\mathbf{B}}$

Comme on travaille avec des moments centrés, il est possible de simplifier les calculs en utilisant les écarts des membres de l'ensemble par rapport à leur espérance :

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p^b = \tilde{\mathbf{x}}_p^b - \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_p^b] \quad (\text{A.36})$$

L'estimateur 3.22 de la covariance devient alors :

$$\tilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{1 \leq p < q \leq N} (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i,p}^b - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i,q}^b)(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{j,p}^b - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{j,q}^b) \quad (\text{A.37})$$

Par définition, les $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p^b$ de l'ensemble ont une espérance nulle, des moments centrés égaux à ceux de $\boldsymbol{\varepsilon}^b$, et sont indépendants deux à deux, au sens où la perturbation $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p^b$ est indépendante de l'indice p . En résumé :

$$\mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i,p}^b] = 0 \quad (\text{A.38a})$$

$$\mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i,p}^b \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{j,p}^b] = \tilde{B}_{ij}^* \quad (\text{A.38b})$$

$$\mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i,p}^b \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{j,p}^b \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k,p}^b \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{l,p}^b] = \tilde{\Xi}_{ij}^* \quad (\text{A.38c})$$

$$\mathbb{E}\left[\prod_p \prod_{i_p} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i_p,p}^b\right] = \prod_p \mathbb{E}\left[\prod_{i_p} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i_p,p}^b\right] \quad (\text{A.38d})$$

Dans la suite, les entiers $\{i, j, k, l\}$ indicent les éléments d'un vecteur donné et les entiers $\{p, q, r, s\}$ indicent les membres de l'ensemble.

L'espérance d'une covariance \tilde{B}_{ij} donnée par le nouvel estimateur 3.22 vaut :

$$\mathbb{E}[\tilde{B}_{ij}] = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{1 \leq p < q \leq N} \left(\mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i,p}^b \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{j,p}^b] + \mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i,q}^b \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{j,q}^b] - \mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i,p}^b \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{j,q}^b] - \mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i,q}^b \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{j,p}^b] \right) \quad (\text{A.39})$$

Or, d'après les propriétés A.38b et A.38d :

$$\mathbb{E}[\tilde{\epsilon}_{i,p}^b \tilde{\epsilon}_{j,p}^b] = \mathbb{E}[\tilde{\epsilon}_{i,q}^b \tilde{\epsilon}_{j,q}^b] = \tilde{B}_{ij}^* \quad (\text{A.40a})$$

$$\mathbb{E}[\tilde{\epsilon}_{i,p}^b \tilde{\epsilon}_{j,q}^b] = \mathbb{E}[\tilde{\epsilon}_{i,q}^b \tilde{\epsilon}_{j,p}^b] = 0 \quad (\text{A.40b})$$

Comme le cardinal de l'ensemble $\{1 \leq p < q \leq N\}$ vaut $N(N-1)/2$, on obtient :

$$\mathbb{E}[\tilde{B}_{ij}] = \tilde{B}_{ij}^* \quad (\text{A.41})$$

En utilisant cette propriété, la covariance de deux covariances estimées par 3.22 est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\tilde{B}_{ij}, \tilde{B}_{kl}) &= \mathbb{E}[(\tilde{B}_{ij} - \mathbb{E}[\tilde{B}_{ij}])(\tilde{B}_{kl} - \mathbb{E}[\tilde{B}_{kl}])] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{N(N-1)} \sum_{1 \leq p < q \leq N} (\tilde{\epsilon}_{i,p}^b - \tilde{\epsilon}_{i,q}^b)(\tilde{\epsilon}_{j,p}^b - \tilde{\epsilon}_{j,q}^b) - \tilde{B}_{ij}^*\right) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{1}{N(N-1)} \sum_{1 \leq r < s \leq N} (\tilde{\epsilon}_{k,r}^b - \tilde{\epsilon}_{k,s}^b)(\tilde{\epsilon}_{l,r}^b - \tilde{\epsilon}_{l,s}^b) - \tilde{B}_{kl}^*\right)\right] \\ &= \frac{4}{N^2(N-1)^2} \sum_{\substack{1 \leq p < q \leq N \\ 1 \leq r < s \leq N}} \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2}(\tilde{\epsilon}_{i,p}^b - \tilde{\epsilon}_{i,q}^b)(\tilde{\epsilon}_{j,p}^b - \tilde{\epsilon}_{j,q}^b) - \tilde{B}_{ij}^*\right) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{1}{2}(\tilde{\epsilon}_{k,r}^b - \tilde{\epsilon}_{k,s}^b)(\tilde{\epsilon}_{l,r}^b - \tilde{\epsilon}_{l,s}^b) - \tilde{B}_{kl}^*\right)\right] \quad (\text{A.42}) \end{aligned}$$

La somme sur les paires d'indices $\{p, q\}$ et $\{r, s\}$ peut être séparée en trois parties, en fonction du cardinal de l'intersection $\{p, q\} \cap \{r, s\}$, qui ne peut prendre que les valeurs 0, 1 ou 2. Les termes correspondants sont détaillés dans la suite.

Cependant, il est à noter que les perturbations de l'ensemble sont indépendantes (propriété A.38d) et que leur espérance est nulle (propriété A.38a). En conséquence, l'espérance du produit de plusieurs éléments des perturbations s'annule dès que l'une de perturbations n'est présente qu'une seule fois dans le produit. Les combinaisons qui s'annulent de la sorte ne seront plus explicitement mentionnées dans la suite. D'autre part, les propriétés A.38b et A.38c permettent d'obtenir les covariances asymptotiques et le moment centré d'ordre quatre asymptotique.

1. Premier cas : $|\{i, j\} \cap \{k, l\}| = 0$

Si l'intersection est vide, l'espérance du produit s'annule, car les perturbations sont indépendantes :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2}(\tilde{\epsilon}_{i,p}^b - \tilde{\epsilon}_{i,q}^b)(\tilde{\epsilon}_{j,p}^b - \tilde{\epsilon}_{j,q}^b) - \tilde{B}_{ij}^*\right)\left(\frac{1}{2}(\tilde{\epsilon}_{k,r}^b - \tilde{\epsilon}_{k,s}^b)(\tilde{\epsilon}_{l,r}^b - \tilde{\epsilon}_{l,s}^b) - \tilde{B}_{kl}^*\right)\right] \\ &= \left(\frac{1}{2}\mathbb{E}[(\tilde{\epsilon}_{i,p}^b - \tilde{\epsilon}_{i,q}^b)(\tilde{\epsilon}_{j,p}^b - \tilde{\epsilon}_{j,q}^b)] - \tilde{B}_{ij}^*\right)\left(\frac{1}{2}\mathbb{E}[(\tilde{\epsilon}_{k,r}^b - \tilde{\epsilon}_{k,s}^b)(\tilde{\epsilon}_{l,r}^b - \tilde{\epsilon}_{l,s}^b)] - \tilde{B}_{kl}^*\right) \\ &= (\tilde{B}_{ij}^* - \tilde{B}_{ij}^*)(\tilde{B}_{kl}^* - \tilde{B}_{kl}^*) \\ &= 0 \quad (\text{A.43}) \end{aligned}$$

2. Second cas : $|\{i, j\} \cap \{k, l\}| = 1$

Il y a $N(N-1)(N-2)$ termes tels que $|\{i, j\} \cap \{k, l\}| = 1$. À une permutation des

indices près, ces termes valent tous :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{2} (\tilde{\varepsilon}_{i,p}^b - \tilde{\varepsilon}_{i,q}^b) (\tilde{\varepsilon}_{j,p}^b - \tilde{\varepsilon}_{j,q}^b) - \tilde{B}_{ij}^* \right) \left(\frac{1}{2} (\tilde{\varepsilon}_{k,p}^b - \tilde{\varepsilon}_{k,s}^b) (\tilde{\varepsilon}_{l,p}^b - \tilde{\varepsilon}_{l,s}^b) - \tilde{B}_{kl}^* \right) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left(\mathbb{E} [\varepsilon_i^b \varepsilon_j^b \varepsilon_k^b \varepsilon_l^b] + 3 \tilde{B}_{ij}^* \tilde{B}_{kl}^* \right) - \tilde{B}_{ij}^* \tilde{B}_{kl}^* \\
&= \frac{1}{4} \left(\tilde{\Xi}_{ijkl}^* - \tilde{B}_{ij}^* \tilde{B}_{kl}^* \right)
\end{aligned} \tag{A.44}$$

3. Troisième cas : $|\{i, j\} \cap \{k, l\}| = 2$

Il y a $N(N-1)/2$ termes tels que $|\{i, j\} \cap \{k, l\}| = 2$. À une permutation des indices près, ces termes valent tous :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{2} (\tilde{\varepsilon}_{i,p}^b - \tilde{\varepsilon}_{i,q}^b) (\tilde{\varepsilon}_{j,p}^b - \tilde{\varepsilon}_{j,q}^b) - \tilde{B}_{ij}^* \right) \left(\frac{1}{2} (\tilde{\varepsilon}_{k,p}^b - \tilde{\varepsilon}_{k,q}^b) (\tilde{\varepsilon}_{l,p}^b - \tilde{\varepsilon}_{l,q}^b) - \tilde{B}_{kl}^* \right) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left(2 \mathbb{E} [\varepsilon_i^b \varepsilon_j^b \varepsilon_k^b \varepsilon_l^b] + 2 \tilde{B}_{ij}^* \tilde{B}_{kl}^* + 2 \tilde{B}_{ik}^* \tilde{B}_{jl}^* + 2 \tilde{B}_{il}^* \tilde{B}_{jk}^* \right) - \tilde{B}_{ij}^* \tilde{B}_{kl}^* \\
&= \frac{1}{2} \left(\tilde{\Xi}_{ijkl}^* + \tilde{B}_{ik}^* \tilde{B}_{jl}^* + \tilde{B}_{il}^* \tilde{B}_{jk}^* - \tilde{B}_{ij}^* \tilde{B}_{kl}^* \right)
\end{aligned} \tag{A.45}$$

En rassemblant tous les termes, on obtient :

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(\tilde{B}_{ij}, \tilde{B}_{kl}) &= \frac{4}{N^2(N-1)^2} \left(\frac{N(N-1)(N-2)}{4} (\tilde{\Xi}_{ijkl}^* - \tilde{B}_{ij}^* \tilde{B}_{kl}^*) \right. \\
&\quad \left. + \frac{N(N-1)}{4} (\tilde{\Xi}_{ijkl}^* + \tilde{B}_{ik}^* \tilde{B}_{jl}^* + \tilde{B}_{il}^* \tilde{B}_{jk}^* - \tilde{B}_{ij}^* \tilde{B}_{kl}^*) \right) \\
&= \frac{4}{N^2(N-1)^2} \left(\frac{N(N-1)^2}{4} \tilde{\Xi}_{ijkl}^* - \frac{N(N-1)^2}{4} \tilde{B}_{ij}^* \tilde{B}_{kl}^* \right. \\
&\quad \left. + \frac{N(N-1)}{4} (\tilde{B}_{ik}^* \tilde{B}_{jl}^* + \tilde{B}_{il}^* \tilde{B}_{jk}^*) \right) \\
&= \frac{1}{N} \tilde{\Xi}_{ijkl}^* - \frac{1}{N} \tilde{B}_{ij}^* \tilde{B}_{kl}^* + \frac{1}{N(N-1)} (\tilde{B}_{ik}^* \tilde{B}_{jl}^* + \tilde{B}_{il}^* \tilde{B}_{jk}^*)
\end{aligned} \tag{A.46}$$

A.2.4. Espérance de $\tilde{\Xi}$

Dans la suite, les entiers $\{i, j, k, l\}$ indiquent les éléments d'un vecteur donné et les entiers $\{p, q, r, s, t\}$ indiquent les membres de l'ensemble.

En utilisant le résultat de l'équation A.30, l'estimation du moment centré d'ordre quatre donnée par 3.5b peut être exprimée par :

$$\tilde{\Xi}_{ijkl} = \frac{1}{N^5} \sum_{1 \leq p, q, r, s, t \leq N} (\tilde{\varepsilon}_{i,p}^b - \tilde{\varepsilon}_{i,q}^b) (\tilde{\varepsilon}_{j,p}^b - \tilde{\varepsilon}_{j,r}^b) (\tilde{\varepsilon}_{k,p}^b - \tilde{\varepsilon}_{k,s}^b) (\tilde{\varepsilon}_{l,p}^b - \tilde{\varepsilon}_{l,t}^b) \tag{A.47}$$

L'espérance de cette somme est donnée par :

$$\mathbb{E}[\tilde{\Xi}_{ijkl}] = \frac{1}{N^5} \sum_{1 \leq p, q, r, s, t \leq N} \mathbb{E}[(\tilde{\varepsilon}_{i,p}^b - \tilde{\varepsilon}_{i,q}^b) (\tilde{\varepsilon}_{j,p}^b - \tilde{\varepsilon}_{j,r}^b) (\tilde{\varepsilon}_{k,p}^b - \tilde{\varepsilon}_{k,s}^b) (\tilde{\varepsilon}_{l,p}^b - \tilde{\varepsilon}_{l,t}^b)] \tag{A.48}$$

Comme les perturbations de l'ensemble sont indépendantes (propriété A.38d) et que leur espérance est nulle (propriété A.38a), une grande partie des termes s'annulent, et il n'en reste

que deux types :

1. Le terme $\tilde{\Xi}_{ijkl}^*$ est présent par la propriété A.38c :
 - $N(N-1)^4$ fois par le produit $\tilde{\epsilon}_{i,p}^b \tilde{\epsilon}_{j,p}^b \tilde{\epsilon}_{k,p}^b \tilde{\epsilon}_{l,p}^b$,
 - $N(N-1)$ fois par le produit $\tilde{\epsilon}_{i,q}^b \tilde{\epsilon}_{j,r}^b \tilde{\epsilon}_{k,s}^b \tilde{\epsilon}_{l,t}^b$,
 soit $N^2(N-1)(N^2-3N+3)$ fois au total.
2. Le terme $\tilde{B}_{ij}^* \tilde{B}_{kl}^*$ est présent par les propriétés A.38b et A.38d :
 - $N(N-1)^3$ fois par le produit $\tilde{\epsilon}_{i,p}^b \tilde{\epsilon}_{j,p}^b \tilde{\epsilon}_{k,s}^b \tilde{\epsilon}_{l,t}^b$,
 - $N(N-1)^3$ fois par le produit $\tilde{\epsilon}_{i,q}^b \tilde{\epsilon}_{j,r}^b \tilde{\epsilon}_{k,p}^b \tilde{\epsilon}_{l,p}^b$,
 - $N(N-1)(N-2)$ fois par le produit $\tilde{\epsilon}_{i,q}^b \tilde{\epsilon}_{j,r}^b \tilde{\epsilon}_{k,s}^b \tilde{\epsilon}_{l,t}^b$,
 soit $N^2(N-1)(2N-3)$ fois. Les termes $\tilde{B}_{ik}^* \tilde{B}_{jl}^*$ et $\tilde{B}_{il}^* \tilde{B}_{jk}^*$ sont également présents le même nombre de fois.

Ainsi, l'espérance de $\tilde{\Xi}_{ijkl}$ vaut :

$$\mathbb{E}[\tilde{\Xi}_{ijkl}] = \frac{(N-1)(N^2-3N+3)}{N^3} \tilde{\Xi}_{ijkl}^* + \frac{(N-1)(2N-3)}{N^3} (\tilde{B}_{ij}^* \tilde{B}_{kl}^* + \tilde{B}_{ik}^* \tilde{B}_{jl}^* + \tilde{B}_{il}^* \tilde{B}_{jk}^*) \quad (\text{A.49})$$

A.2.5. Formule d'estimation itérative des moments centrés

La moyenne de l'ensemble est calculée avec N membres par :

$$\langle \tilde{x}_i^b \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N \tilde{x}_{i,p}^b \quad (\text{A.50})$$

où l'indice N appliqué aux chevrons désigne la taille de l'ensemble sur lequel la moyenne est calculée. Elle peut être transformée en :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{x}_i^b \rangle_N &= \frac{1}{N} (\tilde{x}_{i,N}^b + \sum_{p=1}^{N-1} \tilde{x}_{i,p}^b) \\ &= \frac{1}{N} (\tilde{x}_{i,N}^b + (N-1) \langle \tilde{x}_i^b \rangle_{N-1}) \\ &= \langle \tilde{x}_i^b \rangle_N + \frac{1}{N} (\tilde{x}_{i,N}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle_{N-1}) \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Ceci permet de mettre à jour $\langle \tilde{x}_i^b \rangle_N$ à partir de $\langle \tilde{x}_i^b \rangle_{N-1}$ et du nouveau membre $\tilde{x}_{i,N}^b$. De même, la somme $s_{\mathbf{k},N}$ définie par :

$$s_{\mathbf{k},N} = \sum_{p=1}^N \prod_{i=1}^n (\tilde{x}_{i,p}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle_N)^{k_i} \quad (\text{A.52})$$

où \mathbf{k} est un vecteur d'entiers naturels de taille n , peut être séparée en deux termes :

$$s_{\mathbf{k},N} = \sum_{p=1}^{N-1} \prod_{i=1}^n (\tilde{x}_{i,p}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle_N)^{k_i} + \prod_{i=1}^n (\tilde{x}_{i,N}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle_N)^{k_i} \quad (\text{A.53})$$

En utilisant l'équation 3.28 de récurrence pour la moyenne, puis la formule du binôme de Newton, le premier terme de A.53 peut être développé en :

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=1}^{N-1} \prod_{i=1}^n (\tilde{x}_{i,p}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle_N)^{k_i} \\
&= \sum_{p=1}^{N-1} \prod_{i=1}^n \left(\tilde{x}_{i,p}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle_{N-1} - \frac{1}{N} (\tilde{x}_{i,N}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle_{N-1}) \right)^{k_i} \\
&= \sum_{p=1}^{N-1} \prod_{i=1}^n \sum_{m_i=0}^{k_i} \binom{k_i}{m_i} (\tilde{x}_{i,p}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle_{N-1})^{m_i} \left(-\frac{1}{N} (\tilde{x}_{i,N}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle_{N-1}) \right)^{k_i-m_i} \quad (\text{A.54})
\end{aligned}$$

où \mathbf{m} est le vecteur de taille n contenant entiers naturels m_1, \dots, m_n . En réorganisant les sommes pour extraire le facteur dépendant de p , on obtient :

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=1}^{N-1} \prod_{i=1}^n (\tilde{x}_{i,p}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle_N)^{k_i} \\
&= \sum_{p=1}^{N-1} \sum_{m_1=0}^{k_1} \dots \sum_{m_n=0}^{k_n} \prod_{i=1}^n \left(\binom{k_i}{m_i} \left(\frac{-1}{N} \right)^{k_i-m_i} (\tilde{x}_{i,p}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle_{N-1})^{m_i} (\tilde{x}_{i,N}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle_{N-1})^{k_i-m_i} \right) \\
&= \sum_{m_1=0}^{k_1} \dots \sum_{m_n=0}^{k_n} \left(\frac{-1}{N} \right)^{\sum_{i=1}^n (k_i-m_i)} \prod_{i=1}^n \left(\binom{k_i}{m_i} (\tilde{x}_{i,N}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle_{N-1})^{k_i-m_i} \right) \times \\
& \quad \sum_{p=1}^{N-1} \prod_{i=1}^n (\tilde{x}_{i,p}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle_{N-1})^{m_i} \\
&= \sum_{m_1=0}^{k_1} \dots \sum_{m_n=0}^{k_n} \left(\frac{-1}{N} \right)^{\sum_{i=1}^n (k_i-m_i)} \prod_{i=1}^n \left(\binom{k_i}{m_i} (\tilde{x}_{i,N}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle_{N-1})^{k_i-m_i} \right) s_{\mathbf{m}, N-1} \quad (\text{A.55})
\end{aligned}$$

Le second terme de A.53 est simplement modifié en :

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^n (\tilde{x}_{i,N}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle_N)^{k_i} &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{N-1}{N} (\tilde{x}_{i,N}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle_{N-1}) \right)^{k_i} \\
&= \left(\frac{N-1}{N} \right)^{\sum_{i=1}^n k_i} \prod_{i=1}^n (\tilde{x}_{i,N}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle_{N-1})^{k_i} \quad (\text{A.56})
\end{aligned}$$

d'où en rassemblant les deux termes :

$$\begin{aligned}
s_{\mathbf{k}, N} &= \sum_{m_1=0}^{k_1} \dots \sum_{m_n=0}^{k_n} \left(\frac{-1}{N} \right)^{\sum_{i=1}^n (k_i-m_i)} \prod_{i=1}^n \left(\binom{k_i}{m_i} (\tilde{x}_{i,N}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle_{N-1})^{k_i-m_i} \right) s_{\mathbf{m}, N-1} \\
& \quad + \left(\frac{N-1}{N} \right)^{\sum_{i=1}^n k_i} \prod_{i=1}^n (\tilde{x}_{i,N}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle_{N-1})^{k_i} \quad (\text{A.57})
\end{aligned}$$

A.2.6. Calcul itératif du moment centré d'ordre quatre multivarié

Pour rendre les notations plus compactes, on définit un opérateur pouvant prendre autant d'entiers que nécessaire comme arguments, tel que :

$$/ijkl\dots/ = \begin{cases} 1 & \text{si tous les indices } i, j, k, l, \dots \text{ sont différents} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.58})$$

Pour estimer un moment centré d'ordre quatre multivarié, au maximum quatre éléments du vecteur aléatoire sont concernés. Pour alléger les notations, on peut donc supposer que la taille du vecteur aléatoire vaut $n = 4$. L'algorithme à suivre pour calculer itérativement $\tilde{\mathbf{B}}$ et $\tilde{\Xi}$ est le suivant :

1. Chargement du premier membre $\tilde{\mathbf{x}}_1^b$.
2. Initialisation des variables : $\boldsymbol{\mu} = \tilde{\mathbf{x}}_1^b$, toutes les sommes $s_{\mathbf{k},1}$ sont mises à zéro.
3. Pour p de 2 à N :
 - Chargement du membre $\tilde{\mathbf{x}}_p^b$.
 - Mise à jour de la somme d'ordre quatre, $s_{(1,1,1,1),p}$:

$$\begin{aligned} s_{(1,1,1,1),p} &= s_{(1,1,1,1),p-1} - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^4 (\tilde{x}_{i,p}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle_{p-1}) s_{(/1i/,/2i/,/3i/,/4i/),p-1} \\ &\quad + \frac{1}{p^2} \sum_{1 \leq i,j \leq 4} (\tilde{x}_{i,p}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle_{p-1}) (\tilde{x}_{j,p}^b - \langle \tilde{x}_j^b \rangle_{p-1}) s_{(/1ij/,/2ij/,/3ij/,/4ij/),p-1} \\ &\quad + \frac{(p-1)(p^2-3p+3)}{p^3} \prod_{i=1}^4 (\tilde{x}_{i,p}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle_{p-1}) \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

- Mise à jour des sommes d'ordre trois, de la forme $s_{\mathbf{k},p}$ où \mathbf{k} est une permutation du vecteur $(1, 1, 1, 0)$. Par exemple pour $s_{(1,1,1,0),p}$:

$$\begin{aligned} s_{(1,1,1,0),p} &= s_{(1,1,1,0),p-1} - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^3 (\tilde{x}_{i,p}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle_{p-1}) s_{(/1i/,/2i/,/3i/,0),p-1} \\ &\quad + \frac{(p-1)(p-2)}{p^2} \prod_{i=1}^3 (\tilde{x}_{i,p}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle_{p-1}) \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

- Mise jour des sommes d'ordre deux, de la forme $s_{\mathbf{k},p}$ où \mathbf{k} est une permutation du vecteur $(1, 1, 0, 0)$. Par exemple pour $s_{(1,1,0,0),p}$:

$$s_{(1,1,0,0),p} = s_{(1,1,0,0),p-1} + \frac{p-1}{p} (\tilde{x}_{1,p}^b - \langle \tilde{x}_1^b \rangle_{p-1}) (\tilde{x}_{2,p}^b - \langle \tilde{x}_2^b \rangle_{p-1}) \quad (\text{A.61})$$

- Mise à jour des moyennes :

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{p} (\tilde{\mathbf{x}}_p^b - \boldsymbol{\mu}) \quad (\text{A.62})$$

4. Normalisation des sommes pour obtenir les moments centrés :

- Covariances :

$$\tilde{B}_{12} = \frac{1}{N-1} s_{(1,1,0,0),N} \quad (\text{A.63})$$

— Moment centré d'ordre quatre :

$$\tilde{\Xi}_{1234} = \frac{1}{N} s_{(1,1,1,1),N} \quad (\text{A.64})$$

A.3. Théorie du filtrage linéaire optimal

A.3.1. Changement de base du filtre optimal

La matrice inversible \mathbf{P} permet de passer de la base $\mathcal{B}_{\mathbf{x}}$ à la base $\mathcal{B}_{\mathbf{s}}$:

$$\mathbf{s} = \mathbf{P}\mathbf{x} \quad (\text{A.65a})$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{s} \quad (\text{A.65b})$$

Supposons que les filtres $(\mathbf{F}_{\mathbf{x}}, \mathbf{f}_{\mathbf{x}})$ et $(\mathbf{F}_{\mathbf{s}}, \mathbf{f}_{\mathbf{s}})$ soient optimaux dans les bases $\mathcal{B}_{\mathbf{x}}$ et $\mathcal{B}_{\mathbf{s}}$ respectivement, on obtient des équations 3.37a et 3.37b :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{x}} = \text{Cov}(\tilde{\mathbf{x}}^*, \tilde{\mathbf{x}}) \text{Cov}(\tilde{\mathbf{x}})^{-1} \quad (\text{A.66a})$$

$$\mathbf{f}_{\mathbf{x}} = \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}^*] - \mathbf{F}_{\mathbf{x}} \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}] \quad (\text{A.66b})$$

et :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{s}} = \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}^*, \tilde{\mathbf{s}}) \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}})^{-1} \quad (\text{A.67a})$$

$$\mathbf{f}_{\mathbf{s}} = \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{s}}^*] - \mathbf{F}_{\mathbf{s}} \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{s}}] \quad (\text{A.67b})$$

Les covariances dans les deux bases étant liées par la relation :

$$\text{Cov}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \mathbf{P} \text{Cov}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{P}^T \quad (\text{A.68})$$

Les deux filtres sont alors liés par la relation :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{s}} = \mathbf{P} \mathbf{F}_{\mathbf{x}} \mathbf{P}^{-1} \quad (\text{A.69a})$$

$$\mathbf{f}_{\mathbf{s}} = \mathbf{P} \mathbf{f}_{\mathbf{x}} \quad (\text{A.69b})$$

A.3.2. Diagonalisation du gain du filtre optimal

Comme $\text{Cov}(\tilde{\mathbf{x}}^*)$ et $\text{Cov}(\tilde{\mathbf{x}}^e)$ sont des matrices de covariances, elles sont symétriques définies positives et sont donc diagonalisables dans une base orthornormale :

$$\text{Cov}(\tilde{\mathbf{x}}^*) = \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}^*} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^*} \quad (\text{A.70a})$$

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^*} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^T = \mathbf{I} \quad (\text{A.70b})$$

et :

$$\text{Cov}(\tilde{\mathbf{x}}^e) = \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^e}^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}^e} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^e} \quad (\text{A.71a})$$

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^e} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^e}^T = \mathbf{I} \quad (\text{A.71b})$$

où $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}$ et $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}^e}$ sont des matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs. On peut donc définir $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^{-1/2}$, la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont

les inverses des racines carrées de ceux de $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}$, ce qui donne

$$\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^{-1/2} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^T \text{Cov}(\tilde{\mathbf{x}}^*) \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^*} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^{-1/2} = \mathbf{I} \quad (\text{A.72})$$

On définit alors :

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^{-1/2} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^T \text{Cov}(\tilde{\mathbf{x}}^e) \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^*} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^{-1/2} \quad (\text{A.73})$$

Sachant que si deux matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} sont symétrique définies positives, le produit \mathbf{ABA} l'est aussi, on en déduit que le produit

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^T \mathbf{C} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^*} = \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^{-1/2} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^T \text{Cov}(\tilde{\mathbf{x}}^e) \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^*} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^{-1/2} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^*} \quad (\text{A.74})$$

est symétrique défini positif, car $\text{Cov}(\tilde{\mathbf{x}}^e)$ et $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^{-1/2} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}$ le sont aussi.

Le changement de base $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}$ étant orthonormal, la matrice \mathbf{C} est elle aussi symétrique définie positive, donc diagonalisable dans une base orthonormale :

$$\mathbf{C} = \mathbf{P}_C^T \mathbf{D}_C \mathbf{P}_C \quad (\text{A.75a})$$

$$\mathbf{P}_C \mathbf{P}_C^T = \mathbf{I} \quad (\text{A.75b})$$

où \mathbf{D}_C est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.

Finalement, on pose $\mathbf{P} = \mathbf{P}_C \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^{-1/2} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P}^{-T} &= \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^{1/2} \mathbf{P}_C^T \mathbf{P}_C \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^{1/2} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^*} \\ &= \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}^*} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^*} \\ &= \text{Cov}(\tilde{\mathbf{x}}^*) \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

et :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{D}_C \mathbf{P}^{-T} &= \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^{1/2} \mathbf{P}_C^T \mathbf{D}_C \mathbf{P}_C \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^{1/2} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^*} \\ &= \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^{1/2} \mathbf{C} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}^*}^{1/2} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}^*} \\ &= \text{Cov}(\tilde{\mathbf{x}}^e) \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

Le gain du filtre \mathbf{F} s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \text{Cov}(\tilde{\mathbf{x}}^*) (\text{Cov}(\tilde{\mathbf{x}}^*) + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{x}}^e))^{-1} \\ &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P}^{-T} (\mathbf{P}^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{D}_C) \mathbf{P}^{-T})^{-1} \\ &= \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{D}_C)^{-1} \mathbf{P} \end{aligned} \quad (\text{A.78})$$

Ainsi, le gain du filtre est toujours diagonalisable avec les hypothèses faites sur l'erreur d'estimation. De plus, ses valeurs propres sont de la forme $1/(1 + \lambda_i)$, où λ_i est un coefficient diagonal de \mathbf{D}_C , c'est-à-dire une valeur propre de \mathbf{C} , strictement positive. Les valeurs propres du gain du filtre optimal sont donc toujours strictement comprises entre 0 et 1.

A.4. Filtrage linéaire optimal des covariances

A.4.1. Moments centrés aléatoires

Soit \mathbf{x} un vecteur aléatoire, dont les moments sont connus jusqu'à l'ordre deux. Son espérance et sa covariance sont respectivement données par :

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}] = \mathbf{a} \quad (\text{A.79a})$$

$$\text{Cov}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \quad (\text{A.79b})$$

Soit $\mathbf{A}^{1/2}$ une racine carrée de \mathbf{A} , qui permet d'exprimer \mathbf{x} et toute généralité sous la forme :

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{A}^{1/2}\boldsymbol{\zeta} \quad (\text{A.80})$$

où $\boldsymbol{\zeta}$ est un vecteur aléatoire sans biais dont la matrice de covariance est l'identité :

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{\zeta}] = \mathbf{0} \quad (\text{A.81a})$$

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\zeta}^T] = \mathbf{I} \quad (\text{A.81b})$$

Les moments d'ordre supérieur de $\boldsymbol{\zeta}$ sont déterminés par ceux de \mathbf{x} et par \mathbf{A} .

Supposons maintenant que \mathbf{a} et \mathbf{A} soient aussi des variables aléatoires non nécessairement indépendantes, mais indépendantes de $\boldsymbol{\zeta}$:

$$\mathbf{a} \perp\!\!\!\perp \boldsymbol{\zeta} \quad (\text{A.82a})$$

$$\mathbf{A} \perp\!\!\!\perp \boldsymbol{\zeta} \quad (\text{A.82b})$$

Ces hypothèses permettent de vérifier que :

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}] = \mathbb{E}[\mathbf{a}] + \mathbb{E}[\mathbf{A}^{1/2}\boldsymbol{\zeta}] = \mathbb{E}[\mathbf{a}] \quad (\text{A.83})$$

et que :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{x}) &= \mathbb{E}[(\mathbf{x} - \mathbb{E}[\mathbf{x}])(\mathbf{x} - \mathbb{E}[\mathbf{x}])^T] \\ &= \mathbb{E}[(\mathbf{a} + \mathbf{A}^{1/2}\boldsymbol{\zeta} - \mathbb{E}[\mathbf{a}])(\mathbf{a} + \mathbf{A}^{1/2}\boldsymbol{\zeta} - \mathbb{E}[\mathbf{a}])^T] \\ &= \mathbb{E}[(\mathbf{a} - \mathbb{E}[\mathbf{a}])(\mathbf{a} - \mathbb{E}[\mathbf{a}])^T] + \mathbb{E}[(\mathbf{A}^{1/2}\boldsymbol{\zeta})(\mathbf{A}^{1/2}\boldsymbol{\zeta})^T] \\ &\quad + \mathbb{E}[(\mathbf{a} - \mathbb{E}[\mathbf{a}])(\mathbf{A}^{1/2}\boldsymbol{\zeta})^T] + \mathbb{E}[(\mathbf{A}^{1/2}\boldsymbol{\zeta})(\mathbf{a} - \mathbb{E}[\mathbf{a}])^T] \\ &= \text{Cov}(\mathbf{a}) + \mathbb{E}[\mathbf{A}] \end{aligned} \quad (\text{A.84})$$

En résumé, lorsque l'espérance et la covariance d'un vecteur aléatoire deviennent elles aussi des variables aléatoires sous les hypothèses précédentes :

- la nouvelle espérance $\mathbb{E}[\mathbf{x}]$ est donnée par l'espérance de l'espérance initiale \mathbf{a} (équation A.83),
- la nouvelle covariance $\text{Cov}(\mathbf{x})$ est donnée par la covariance de l'espérance initiale \mathbf{a} ajoutée à l'espérance de la covariance initiale \mathbf{A} (équation A.84).

A.4.2. Critères de filtrage linéaire optimal des covariances

Les conditions d'optimalité du filtrage linéaire 3.36a et 3.36b transposées aux covariances sont données par :

$$\mathbb{E}[\hat{B}_{ij}^e] = 0 \quad (\text{A.85})$$

$$\mathbb{E}[\hat{B}_{ij}^e \tilde{B}_{kl}] = 0 \quad (\text{A.86})$$

Dans cette section, on suppose que les hypothèses 3.40, 3.41 et 3.66 sont vérifiées.

Propriété directe

L'erreur d'estimation de la covariance brute $\tilde{\mathbf{B}}^e$ peut être exprimée comme :

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{ij}^e &= \tilde{B}_{ij} - \tilde{B}_{ij}^* \\ &= \tilde{B}_{ij} - \hat{B}_{ij} + \hat{B}_{ij}^e \end{aligned} \quad (\text{A.87})$$

A l'optimalité du filtre, les propriétés d'orthogonalité de l'erreur de filtrage et de l'estimation brute (équation 3.48) font disparaître plusieurs termes de la covariance de $\tilde{\mathbf{B}}^e$, pour donner :

$$\mathbb{E}[\tilde{B}_{ij}^e \tilde{B}_{kl}^e] = \mathbb{E}[\tilde{B}_{ij} \tilde{B}_{kl}] + \mathbb{E}[\hat{B}_{ij} \hat{B}_{kl}] + \mathbb{E}[\hat{B}_{ij}^e \hat{B}_{kl}^e] - 2\mathbb{E}[\tilde{B}_{ij} \hat{B}_{kl}] \quad (\text{A.88})$$

En combinant cette équation avec les équations 3.50 et 3.51, on obtient :

$$\mathbb{E}[\tilde{B}_{ij}^e \tilde{B}_{kl}^e] = \mathbb{E}[\tilde{B}_{ij} \tilde{B}_{kl}] - \mathbb{E}[\tilde{B}_{ij} \hat{B}_{kl}] \quad (\text{A.89})$$

Pour obtenir le résultat qui nous intéresse, on part de l'équation 3.69 dans laquelle on remplace :

- le membre de gauche $\text{Cov}(\tilde{B}_{ij}^e, \tilde{B}_{kl}^e)$ grâce à l'équation A.89.
- l'espérance du moment centré d'ordre quatre asymptotique grâce à l'équation 3.72,
- tous les produits d'éléments de la covariance asymptotique par l'équation 3.51,

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{B}_{ij} \tilde{B}_{kl}] - \mathbb{E}[\tilde{B}_{ij} \hat{B}_{kl}] &= \frac{1}{N} \left(\frac{N^3}{(N-1)(N^2-3N+3)} \mathbb{E}[\tilde{\Xi}_{ijkl}] \right. \\ &\quad \left. - \frac{(2N-3)}{N^2-3N+3} \left(\mathbb{E}[\tilde{B}_{ij} \hat{B}_{kl}] + \mathbb{E}[\tilde{B}_{ik} \hat{B}_{jl}] + \mathbb{E}[\tilde{B}_{il} \hat{B}_{jk}] \right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{N} \mathbb{E}[\tilde{B}_{ij} \hat{B}_{kl}] + \frac{1}{N(N-1)} \left(\mathbb{E}[\tilde{B}_{ik} \hat{B}_{jl}] + \mathbb{E}[\tilde{B}_{il} \hat{B}_{jk}] \right) \end{aligned} \quad (\text{A.90})$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\tilde{B}_{ij} \tilde{B}_{kl}] - \frac{(N-2)^2}{N^2-3N+3} \mathbb{E}[\tilde{B}_{ij} \hat{B}_{kl}] - \frac{N^2}{(N-1)(N^2-3N+3)} \mathbb{E}[\tilde{\Xi}_{ijkl}] \\ &+ \frac{N-2}{(N-1)(N^2-3N+3)} \left(\mathbb{E}[\tilde{B}_{ik} \hat{B}_{jl}] + \mathbb{E}[\tilde{B}_{il} \hat{B}_{jk}] \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.91})$$

Propriété inverse

Pour démontrer la propriété inverse, on suppose que l'équation A.91 est vérifiée, et on montre qu'alors le filtre linéaire est nécessairement optimal. Les hypothèses 3.40 et 3.41 impliquent que :

$$\mathbb{E}[\tilde{B}_{ij}\tilde{B}_{kl}] = \mathbb{E}[\tilde{B}_{ij}^*\tilde{B}_{kl}^*] + \mathbb{E}[\tilde{B}_{ij}^e\tilde{B}_{kl}^e] \quad (\text{A.92})$$

et aussi que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{B}_{ij}\hat{B}_{kl}] &= \mathbb{E}[\tilde{B}_{ij}\tilde{B}_{kl}^*] + \mathbb{E}[\tilde{B}_{ij}\hat{B}_{kl}^e] \\ &= \mathbb{E}[\tilde{B}_{ij}^*\tilde{B}_{kl}^*] + \mathbb{E}[\tilde{B}_{ij}\hat{B}_{kl}^e] \end{aligned} \quad (\text{A.93})$$

En combinant cette équation et les équations 3.68 et 3.72 avec l'équation A.91, on obtient :

$$0 = (N-2)\mathbb{E}[\tilde{B}_{ij}\hat{B}_{kl}^e] - \frac{1}{N-1}(\mathbb{E}[\tilde{B}_{ik}\hat{B}_{jl}^e] + \mathbb{E}[\tilde{B}_{il}\hat{B}_{jk}^e]) \quad (\text{A.94})$$

L'équation A.94 peut être écrite pour les $4! = 24$ permutations d'indices (i, j, k, l) , ce qui construit un système linéaire de 24 équations à 24 inconnues : les couples $\mathbb{E}[\tilde{B}_{ij}\hat{B}_{kl}^e]$ et leurs permutations d'indices. Le déterminant de ce système peut être calculé explicitement à l'aide d'un logiciel de calcul formel : il s'agit d'une fraction de deux polynômes en N de degrés 36 et 12. Ce déterminant ne s'annule que pour $N \in \{0, 2, 3\}$. Si l'ensemble compte plus de trois membres, alors le système linéaire est inversible, d'où :

$$\mathbb{E}[\tilde{B}_{ij}\hat{B}_{kl}^e] = 0 \quad (\text{A.95})$$

et de même pour toutes les permutations d'indices.

Cas du filtrage de Schur

Le filtre de Schur optimal est obtenu lorsque l'erreur de filtrage est orthogonale à l'estimation brute (équation 3.60) soit pour les covariances :

$$\mathbb{E}[\hat{B}_{ij}^e\tilde{B}_{ij}] = 0 \quad (\text{A.96})$$

Mais contrairement au filtre linéaire, l'erreur de filtrage est biaisée.

Il existe une analogie évidente entre les propriétés du filtre linéaire optimal et celles du filtre de Schur optimal :

- orthogonalité de l'erreur de filtrage et de l'estimation brute : équations 3.48 et 3.64a
- espérance de l'erreur de filtrage au carré : équations 3.50 et 3.64b
- transformation du produit d'éléments de la vérité : équations 3.51 et 3.64c

La seule différence est que ces propriétés du filtrage de Schur ne concernent que les produits élément par élément, et pas les produits croisés comme pour le filtrage linéaire.

Il est donc possible d'appliquer la même démonstration que dans le paragraphe précédent, en remplaçant les termes de l'équation 3.69 pour laquelle on pose $k = i$ et $l = j$. Seul le produit $\mathbb{E}[\tilde{B}_{ii}^*\tilde{B}_{jj}^*]$ ne peut pas être transformé par l'équation 3.64c, car l'orthogonalité de l'équation 3.60 ne s'applique pas aux produits croisés.

Ainsi, le critère d'optimalité du filtrage de Schur est donné par :

$$\mathcal{C}_{ij}^S = 0 \quad (\text{A.97})$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{ij}^S = & \mathbb{E}[\tilde{B}_{ij}^2] - \frac{N^3 - 5N^2 + 7N - 2}{(N-1)(N^2 - 3N + 3)} \mathbb{E}[\tilde{B}_{ij} \hat{B}_{ij}] - \frac{N^2}{(N-1)(N^2 - 3N + 3)} \mathbb{E}[\tilde{\Xi}_{ijij}] \\ & + \frac{N-2}{(N-1)(N^2 - 3N + 3)} \mathbb{E}[\tilde{B}_{ii}^* \tilde{B}_{jj}^*] \end{aligned} \quad (\text{A.98})$$

A.4.3. Unicité des critères de filtrage des variances

Propriétés dans l'espace spectral

Les variances brutes et filtrées $\tilde{\mathbf{v}}$ et $\hat{\mathbf{v}}$ peuvent être transformées dans l'espace spectral pour donner $\tilde{\mathbf{s}}$ et $\hat{\mathbf{s}}$. La formule de Plancherel donne la moyenne spatiale d'un produit de Schur de deux vecteurs dans l'espace physique comme une moyenne spectrale d'un produit de Schur de leurs équivalents dans l'espace spectral :

$$\mu^S(\tilde{\mathbf{v}} \circ \hat{\mathbf{v}}) = \sum_{k=0}^K \tilde{s}_k \overline{\hat{s}_k} \quad (\text{A.99})$$

où K est l'indice du nombre d'onde maximum, et la barre supérieure indique le complexe conjugué. Les résultats de Berre (2000) montre qu'un filtrage homogène et isotrope dans l'espace physique est équivalent à un filtre diagonal dans l'espace spectral :

$$\hat{s}_k = \rho_k \tilde{s}_k \quad (\text{A.100})$$

où les ρ_k sont les coefficients réels du filtre spectral, bornés entre 0 et 1, avec $\rho_0 = 1$ pour conserver la moyenne spatiale. Pour les formes usuelles des fonctions de filtrage, on peut vérifier que pour $k > 0$:

$$\frac{d\rho_k}{d\mathcal{L}^f} < 0 \quad (\text{A.101})$$

car pour une intensité de filtrage croissante (si \mathcal{L}^f augmente), les coefficients ρ_k convergent vers 0.

Démonstration de l'unicité

Dans le cas général, la transformée spectrale de $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ est notée $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}$. L'équation 4.8 peut ainsi être exprimée dans l'espace spectral par :

$$\bar{\mathcal{C}} = \sum_{k=0}^K \left(1 - \frac{N(N-3)(N-2)}{(N-1)(N^2 - 3N + 3)} \rho_k \right) |\tilde{s}_k|^2 - \frac{N^2}{(N-1)(N^2 - 3N + 3)} \tilde{\zeta}_0 \quad (\text{A.102})$$

Sa dérivée par rapport à un coefficient ρ_k est donnée pour $k > 0$ par :

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{C}}}{\partial \rho_k} = - \frac{N(N-3)(N-2)}{(N-1)(N^2 - 3N + 3)} |\tilde{s}_k|^2 < 0 \quad (\text{A.103})$$

de telle sorte que :

$$\frac{d\bar{\mathfrak{C}}}{d\mathcal{L}^f} = \sum_{k=1}^K \frac{\partial \bar{\mathfrak{C}}}{\partial \rho_k} \frac{d\rho_k}{d\mathcal{L}^f} > 0 \quad (\text{A.104})$$

ce qui prouve que $\bar{\mathfrak{C}}(\mathcal{L}^f)$ est une fonction strictement croissante.

De plus, s'il n'y a pas de filtrage ($\mathcal{L}^f = 0$), $\hat{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}$ de telle sorte que :

$$\bar{\mathfrak{C}}(\mathcal{L}^f = 0) = \frac{N^2 - 3}{(N - 1)(N^2 - 3N + 3)} \mu^S(\tilde{\mathbf{v}}^2) - \frac{N^2}{(N - 1)(N^2 - 3N + 3)} \mu^S(\tilde{\boldsymbol{\xi}}) \quad (\text{A.105})$$

D'après les équations 3.5a et 3.5b utilisées pour calculer $\tilde{\mathbf{v}}$ et $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ respectivement, on obtient :

$$(N - 1)\tilde{v}_i = \sum_{p=1}^N (\tilde{x}_{i,p}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle)^2 \quad (\text{A.106})$$

$$N\tilde{\xi}_i = \sum_{p=1}^N (\tilde{x}_{i,p}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle)^4 \quad (\text{A.107})$$

et d'après la propriété de convexité :

$$\sum_{p=1}^N (\tilde{x}_{i,p}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle)^4 \geq \left(\sum_{p=1}^N (\tilde{x}_{i,p}^b - \langle \tilde{x}_i^b \rangle)^2 \right)^2 \quad (\text{A.108})$$

d'où :

$$\tilde{\xi}_i \geq \frac{(N - 1)^2}{N} \tilde{v}_i^2 \quad (\text{A.109})$$

et donc finalement :

$$\mu^S(\tilde{\boldsymbol{\xi}}) \geq \frac{(N - 1)^2}{N} \mu^S(\tilde{\mathbf{v}}^2) \quad (\text{A.110})$$

et :

$$\bar{\mathfrak{C}}(\mathcal{L}^f = 0) \leq -\frac{N^3 - 3N^2 + N + 3}{(N - 1)(N^2 - 3N + 3)} \mu^S(\tilde{\mathbf{v}}^2) < 0 \quad (\text{A.111})$$

En conclusion, la condition d'optimalité $\bar{\mathfrak{C}}(\mathcal{L}^f) = 0$ n'est obtenue que pour une unique valeur de longueur de filtrage \mathcal{L}^f .

A.5. Longueur de portée d'une fonction hypergaussienne

D'après Purser *et al.* (2003b), la famille des fonctions hypergaussiennes peut être définie en 1D par :

$$H_{\ell,\gamma}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(s - \log(\ell))^2}{\gamma}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi} \exp(s)} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\exp(s)}\right)^2\right) ds \quad (\text{A.112})$$

où ℓ est un paramètre d'échelle, γ un paramètre de forme et s est une variable d'intégration. $H_{\ell,\gamma}(0)$ est donc donné par :

$$H_{\ell,\gamma}(0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(s - \log(\ell))^2}{\gamma} - s\right) ds \quad (\text{A.113})$$

et la dérivée d'ordre deux à l'origine par est donnée par :

$$\left. \frac{d^2 H_{\ell, \gamma}}{dx^2} \right|_{x=0} = -\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(s - \log(\ell))^2}{\gamma} - 3s \right) ds \quad (\text{A.114})$$

Sachant que pour tout réel positif a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(- (as^2 + bs + c) \right) ds = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp \left(\frac{b^2}{4a} - c \right) \quad (\text{A.115})$$

le rapport des équations A.113 et A.114 peut être simplifié en :

$$\frac{H_{\ell, \gamma}(0)}{\left. \frac{d^2 H_{\ell, \gamma}}{dx^2} \right|_{x=0}} = -\exp \left(\frac{\gamma}{2} \left(\left(1 - \frac{\log(\ell)}{\gamma} \right)^2 - \left(3 - \frac{\log(\ell)}{\gamma} \right) \right)^2 \right) = -\exp(2 \log(\ell) - 4\gamma) \quad (\text{A.116})$$

de sorte que la longueur de portée définie dans Daley (1991) est donnée par :

$$\mathcal{L} = \sqrt{-\frac{H_{\ell, \gamma}(0)}{\left. \frac{d^2 H_{\ell, \gamma}}{dx^2} \right|_{x=0}}} = \frac{\ell}{\exp(2\gamma)} \quad (\text{A.117})$$

A.6. Propriétés de l'inflation estimée

On étudie les propriétés de l'inflation estimée par l'équation 6.10 :

$$\bar{\lambda} = \frac{\text{Tr}(\mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T])}{\text{Tr}(\tilde{\mathbf{B}})} \quad (\text{A.118})$$

En notant \mathbf{x}^b l'ébauche du cycle d'assimilation non perturbé, la différence $\boldsymbol{\varepsilon}$ peut être décomposée en :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{b}} - \delta \mathbf{x}^a \quad (\text{A.119})$$

où $\tilde{\mathbf{b}}$ est la différence entre la moyenne de l'ensemble et l'ébauche non perturbée :

$$\tilde{\mathbf{b}} = \langle \tilde{\mathbf{x}}^b \rangle - \mathbf{x}^b \quad (\text{A.120})$$

et $\delta \mathbf{x}^a$ est l'incrément d'analyse du cycle d'assimilation non perturbé :

$$\delta \mathbf{x}^a = \mathbf{x}^a - \mathbf{x}^b \quad (\text{A.121})$$

Si l'ensemble est sans biais ($\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{b}}] = 0$), alors Muirhead (2005) montre que :

$$\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{b}}^T] \simeq \tilde{\mathbf{B}}^*/N \quad (\text{A.122})$$

L'incrément d'analyse est donné par :

$$\delta \mathbf{x}^a = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{H}^T + \bar{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{d} \quad (\text{A.123})$$

où \mathbf{d} est l'innovation. Ainsi :

$$\mathbb{E}[\delta \mathbf{x}^a \delta \mathbf{x}^{aT}] = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{H}^T + \bar{\mathbf{R}})^{-1} \mathbb{E}[\mathbf{d} \mathbf{d}^T] (\mathbf{H} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{H}^T + \bar{\mathbf{R}})^{-T} \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}} \quad (\text{A.124})$$

avec :

$$\mathbb{E}[\mathbf{d} \mathbf{d}^T] = \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{H}^T + \mathbf{R} \quad (\text{A.125})$$

En supposant que $\bar{\mathbf{B}} \simeq \mathbf{B}$ et que $\bar{\mathbf{R}} \simeq \mathbf{R}$, alors :

$$\mathbb{E}[\delta \mathbf{x}^a \delta \mathbf{x}^{aT}] \simeq \mathbf{B} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{H} \mathbf{B} \quad (\text{A.126})$$

En supposant que $\tilde{\mathbf{b}}$ et $\delta \mathbf{x}^a$ sont décorrélés, on obtient :

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T] \simeq \frac{1}{N} \tilde{\mathbf{B}}^* + \mathbf{B} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{H} \mathbf{B} \quad (\text{A.127})$$

Dans un cas idéalisé où le vecteur d'état ne compte qu'un seul élément qui est observé directement, l'inflation estimée vaut :

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{N} \frac{\tilde{v}^*}{\tilde{v}} + \frac{v^2}{\tilde{v}(v + (\sigma^o)^2)} \quad (\text{A.128})$$

où la lettre v renvoie aux variances d'erreur d'ébauche et σ^o est l'écart-type d'erreur d'observation. Dans la limite asymptotique où $N \rightarrow \infty$ et dans l'hypothèse où $(\sigma^o)^2 \ll v$, alors :

$$\bar{\lambda} \rightarrow \frac{v}{\tilde{v}^*} \quad (\text{A.129})$$

ce qui est la valeur théorique de λ pour un ensemble de taille infinie.

Cependant, si l'ensemble est de taille finie et si $(\sigma^o)^2$ n'est pas négligeable devant v , alors la valeur de l'inflation estimée par l'équation A.128 peut être considérée sous la forme :

$$\bar{\lambda} = a + b\lambda \quad (\text{A.130})$$

où $\lambda = v/\tilde{v}$ est l'inflation théorique, et où :

- le terme additif $a = \tilde{v}^*/(N\tilde{v})$, d'espérance $1/N$, tend à surestimer l'inflation,
- le facteur $b = v/(v + (\sigma^o)^2)$, toujours inférieur à 1, tend à sous-estimer l'inflation.

Ces deux effets peuvent donc se compenser dans une certaine mesure, mais rien ne le garantit. En particulier, on ne peut garantir que l'inflation ainsi calculée soit supérieure à 1, ce qui est requis si l'on entend pallier l'absence d'erreur modèle additive.

Bibliographie

- Aitken AC. 1935. On least squares and linear combinations of observations. In : *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, vol. 55. pp. 42–48.
- Amodei M, Stein J. 2009. Deterministic and fuzzy verification methods for a hierarchy of numerical models. *Meteorological Applications* **16**(2) : 191–203.
- Anderson JL. 2007. Exploring the need for localization in ensemble data assimilation using a hierarchical ensemble filter. *Physica D : Nonlinear Phenomena* **230**(1-2) : 99–111.
- Anderson JL. 2012. Localization and sampling error correction in ensemble Kalman filter data assimilation. *Monthly Weather Review* **140**(7) : 2359–2371.
- Anderson JL, Lei L. 2013. Empirical localization of observation impact in ensemble Kalman filters. *Monthly Weather Review* **141**(11) : 4140–4153.
- Andersson E, Bauer P, Beljaars A, Chevallier F, Hólm E, Janisková M, Kållberg P, Kelly G, Lopez P, McNally A, Moreau E, Simmons AJ, Thépaut JN, Tompkins AM. 2005. Assimilation and modeling of the atmospheric hydrological cycle in the ecmwf forecasting system. *Bulletin of the American Meteorological Society* **86**(3).
- Auligné T. 2012. An integrated ensemble/variational hybrid data assimilation system. Présentation à l'International Conference on Ensemble Methods in Geophysical Sciences, du 12 au 16 novembre 2012, Toulouse, France.
- Bannister RN. 2008a. A review of forecast error covariance statistics in atmospheric variational data assimilation. I : Characteristics and measurements of forecast error covariances. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **134**(637) : 1951–1970.
- Bannister RN. 2008b. A review of forecast error covariance statistics in atmospheric variational data assimilation. II : Modelling the forecast error covariance statistics. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **134**(637) : 1971–1996.
- Barker DM, Huang W, Guo YR, Bourgeois AJ, Xiao QN. 2004. A three-dimensional variational data assimilation system for MM5 : Implementation and initial results. *Monthly Weather Review* **132**(4) : 897–914.
- Bartello P, Mitchell HL. 1992. A continuous three-dimensional model of short-range forecast error covariances. *Tellus A* **44**(3) : 217–235.
- Belo Pereira M, Berre L. 2006. The use of an ensemble approach to study the background error covariances in a global NWP model. *Monthly Weather Review* **134**(9) : 2466–2489.
- Berre L. 2000. Estimation of synoptic and mesoscale forecast error covariances in a limited-area model. *Monthly Weather Review* **128**(3) : 644–667.
- Berre L, Desroziers G. 2010. Filtering of background error variances and correlations by local spatial averaging : A review. *Monthly Weather Review* **138**(10) : 3693–3720.
- Berre L, Pannekoucke O, Desroziers G, Stefanescu S, Chapnik B, Raynaud L. 2007. A variational assimilation ensemble and the spatial filtering of its error covariances : increase of sample size by local spatial averaging. In : *ECMWF Workshop on Flow-dependent aspects of data assimilation, 11-13 June 2007*. ECMWF, pp. 151–168.
- Berre L, Stefanescu S, Belo Pereira M. 2006. The representation of the analysis effect in three error simulation techniques. *Tellus A* **58**(2) : 196–209.
- Bishop CH, Hodyss D. 2007. Flow-adaptive moderation of spurious ensemble correlations and its use in ensemble-based data assimilation. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **133**(629) : 2029–2044.

- Bishop CH, Hodyss D. 2009a. Ensemble covariances adaptively localized with ECO-RAP. part 1 : tests on simple error models. *Tellus A* **61**(1) : 84–96.
- Bishop CH, Hodyss D. 2009b. Ensemble covariances adaptively localized with ECO-RAP. part 2 : a strategy for the atmosphere. *Tellus A* **61**(1) : 97–111.
- Bishop CH, Hodyss D. 2011. Adaptive ensemble covariance localization in ensemble 4D-VAR state estimation. *Monthly Weather Review* **139**(4) : 1241–1255.
- Bishop CH, Satterfield EA. 2012. Hidden error variance theory 1 : Exposition and analytic model. *Monthly Weather Review* **141** : 1454–1468.
- Bocquet M. 2011. Ensemble kalman filtering without the intrinsic need for inflation. *Nonlinear Processes in Geophysics* **18**(5) : 735–750.
- Bocquet M, Sakov P. 2012. Combining inflation-free and iterative ensemble kalman filters for strongly nonlinear systems. *Nonlinear Processes in Geophysics* **19**(3) : 383–399.
- Bonavita M, Isaksen L, Holm E. 2012. On the use of EDA background error variances in the ECMWF 4D-Var. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **138** : 1540–1559.
- Bonavita M, Raynaud L, Isaksen L. 2011. Estimating background-error variances with the ecmwf ensemble of data assimilations system : some effects of ensemble size and day-to-day variability. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **137**(655) : 423–434.
- Bouttier F. 1994. A dynamical estimation of forecast error covariances in an assimilation system. *Monthly Weather Review* **122**(10) : 2376–2390.
- Brousseau P, Berre L, Bouttier F, Desroziers G. 2011. Background-error covariances for a convective-scale data-assimilation system : AROME-France 3D-Var. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **137**(655) : 409–422.
- Brousseau P, Berre L, Bouttier F, Desroziers G. 2012. Flow-dependent background-error covariances for a convective-scale data assimilation system. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **138**(663) : 310–322.
- Brousseau P, Desroziers G, Bouttier F, Chapnik B. 2014. A posteriori diagnostics of the impact of observations on the AROME-France convective-scale data assimilation system. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **140**(680) : 982–994.
- Buehner M. 2005. Ensemble-derived stationary and flow-dependent background-error covariances : Evaluation in a quasi-operational NWP setting. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **131**(607) : 1013–1043.
- Clayton AM, Lorenc AC, Barker DM. 2012. Operational implementation of a hybrid ensemble/4D-Var global data assimilation system at the Met Office. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **139** : 1445–1461.
- Courtier P. 1997. Dual formulation of four-dimensional variational assimilation. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **123**(544) : 2449–2461.
- Courtier P, Freydier C, Geleyn JF, Rabier F, Rochas M. 1991. The arpege project at meteo france. In : *Seminar on Numerical Methods in Atmospheric Models, 9-13 September 1991*. European Centre for Medium-Range Weather Forecasts, pp. 193–232.
- Courtier P, Geleyn JF. 1988. A global numerical weather prediction model with variable resolution : Application to the shallow-water equations. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **114**(483) : 1321–1346.
- Courtier P, Thépaut JN, Hollingsworth A. 1994. A strategy for operational implementation of 4D-Var, using an incremental approach. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **120**(519) : 1367–1387.
- Daley R. 1991. *Atmospheric data analysis*. Cambridge University Press.
- Davies HC. 1976. A laterul boundary formulation for multi-level prediction models. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **102**(432) : 405–418.

- Deckmyn A, Berre L. 2005. A wavelet approach to representing background error covariances in a limited-area model. *Monthly Weather Review* **133**(5) : 1279–1294.
- Dee DP. 1995. On-line estimation of error covariance parameters for atmospheric data assimilation. *Monthly Weather Review* **123**(4) : 1128–1145.
- Dee DP, da Silva AM. 2003. The choice of variable for atmospheric moisture analysis. *Monthly Weather Review* **131**(1) : 155–171.
- Deheuvels P. 1982. *La probabilité, le hasard et la certitude*. Que sais-je ?, Presses Universitaires de France.
- Derber J, Bouttier F. 1999. A reformulation of the background error covariance in the ECMWF global data assimilation system. *Tellus A* **51**(2) : 195–221.
- Desroziers G, Berre L, Chapnik B, Poli P. 2005. Diagnosis of observation, background and analysis-error statistics in observation space. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **131**(613) : 3385–3396.
- Desroziers G, Camino JT, Berre L. 2014. 4denvar : link with 4d state formulation of variational assimilation and different possible implementations. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* doi :10.1002/qj.2325.
- Drobinski P, Ducrocq V, Alpert P, Anagnostou E, Béranger K, Borga M, Braud I, Chanzy A, Davolio S, Delrieu G, Estournel C, Boubrahmi NF, Font J, Grubisic V, Gualdi S, Homar V, Ivancan-Picek B, Kottmeier C, Kotroni V, Lagouvardos K, Lionello P, Llasat M, Ludwig W, Lutoff C, Mariotti A, Richard E, Romero R, Rotunno R, Roussot O, Ruin I, Somot S, Taupier-Letage I, Tintore J, Uijlenhoet R, Wernli H. 2013. Hymex, a 10-year multidisciplinary program on the mediterranean water cycle. *Bulletin of the American Meteorological Society* doi :10.1175/BAMS-D-12-00242.1.
- Ducrocq V, Braud I, Davolio S, Ferretti R, Flamant C, Jansa A, Kalthoff N, Richard E, Taupier-Letage I, Aryal PA, Belamari S, Berne A, Borga M, Boudevillain B, Bock O, Boichard JL, Bouin MN, Bousquet O, Bouvier C, Chiggiato J, Cimini D, Corsmeier U, Coppola L, Cocquerez P, Defer E, Delanoë J, Di Girolamo P, Doerenbecher A, Drobinski P, Dufournet Y, Fourrié N, Gourley JJ, Labatut L, Lambert D, Le Coz J, Marzano FS, Molinié G, Montani A, Nord G, Nuret M, Ramage K, Rison B, Roussot O, Said F, Schwarzenboeck A, Testor P, Van Baelen J, Vincendon B, Aran M, Tamayo J. 2013. Hymex-sop1, the field campaign dedicated to heavy precipitation and flash flooding in the northwestern mediterranean. *Bulletin of the American Meteorological Society* doi :10.1175/BAMS-D-12-00244.1.
- Dykstra R. 1970. Establishing the positive definiteness of the sample covariance matrix. *The Annals of Mathematical Statistics* **41** : 2153–2154.
- Evensen G. 1994. Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte-Carlo methods to forecast error statistics. *Journal of Geophysical Research* **99**(C5) : 10 143–10 162.
- Evensen G. 2003. The ensemble Kalman filter : theoretical formulation and practical implementation. *Ocean Dynamics* **53** : 343–367.
- Fisher M, Courtier P. 1995. Estimating the covariance matrices of analysis and forecast error in variational data assimilation. Rapport technique, ECMWF.
- Fisher M, Hølm E, Tan D, Thépaut JN, Trémolet Y. 2009. Balance in the ECMWF analysis. Rapport technique, ECMWF.
- Gaspari G, Cohn SE. 1999. Construction of correlation functions in two and three dimensions. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **125**(554) : 723–757.
- Gelb A. 1974. *Applied optimal estimation*. The MIT press.
- Guidard V. 2007. Assimilation multi-échelle dans un modèle météorologique régional. Thèse de doctorat, Université Toulouse III - Paul Sabatier.
- Guidard V, Fourrié N, Brousseau P, Rabier F. 2011. Impact of iasi assimilation at global and

- convective scales and challenges for the assimilation of cloudy scenes. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **137**(661) : 1975–1987.
- Hamill TM, Snyder C. 2000. A hybrid ensemble kalman filter/3D variational analysis scheme. *Monthly Weather Review* **128**(8) : 2905–2919.
- Hamill TM, Whitaker JS, Snyder C. 2001. Distance-dependent filtering of background error covariance estimates in an ensemble Kalman filter. *Monthly Weather Review* **129**(11) : 2776–2790.
- Haugen JE, Machenhauer B. 1993. A spectral limited-area model formulation with time-dependent boundary conditions applied to the shallow-water equations. *Monthly Weather Review* **121**(9) : 2618–2630.
- Hólm E, Andersson E, Beljaars A, Lopez P, Mahfouf J, Simmons A, Thépaut J. 2002. *Assimilation and modelling of the hydrological cycle : Ecmwf's status and plans*. ECMWF.
- Houtekamer PL, Mitchell HL. 1998. Data assimilation using an ensemble Kalman filter technique. *Monthly Weather Review* **126**(3) : 796–811.
- Houtekamer PL, Mitchell HL. 2001. A sequential ensemble Kalman filter for atmospheric data assimilation. *Monthly Weather Review* **129**(1) : 123–137.
- Houtekamer PL, Mitchell HL, Deng X. 2009. Model error representation in an operational ensemble Kalman filter. *Monthly Weather Review* **137**(7) : 2126–2143.
- Ingleby NB. 2001. The statistical structure of forecast errors and its representation in the Met Office global 3-D variational data assimilation scheme. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **127**(571) : 209–231.
- Isserlis L. 1916. On certain probable errors and correlation coefficients of multiple frequency distributions with skew regression. *Biometrika* **11**(3) : 185–190.
- Isserlis L. 1918. On a formula for the product-moment coefficient of any order of a normal frequency distribution in any number of variables. *Biometrika* **12**(1/2) : 134–139.
- Jensen J. 1906. Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta Mathematica* **30**(1) : 175–193.
- Julier S, Uhlmann J. 2004. Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE* **92**(3) : 401–422.
- Kalman RE. 1960. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of basic Engineering* **82**(1) : 35–45.
- Khinchin AY. 1934. Korrelationstheorie der stationären stochastischen prozesse. *Mathematische Annalen* **109** : 604–615.
- Knuth DE. 1997. *Art of computer programming, volume 2 : Seminumerical algorithms (3rd edition)*. Addison-Wesley Professional, 3 edn.
- Lafore JP, Stein J, Asencio N, Bougeault P, Ducrocq V, Duron J, Fischer C, Héreil P, Mascart P, Masson V, Pinty JP, Redelsperger JL, Richard E, Vilà-Guerau de Arellano J. 1998. The Meso-NH atmospheric simulation system. Part I : adiabatic formulation and control simulations. *Annales Geophysicae* **16**(1) : 90–109.
- Le Dimet FX, Talagrand O. 1986. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : theoretical aspects. *Tellus A* **38A**(2) : 97–110.
- Liu C, Xiao Q, Wang B. 2008. An ensemble-based four-dimensional variational data assimilation scheme. part I : Technical formulation and preliminary test. *Monthly Weather Review* **136**(9) : 3363–3373.
- Liu C, Xiao Q, Wang B. 2009. An ensemble-based four-dimensional variational data assimilation scheme. part II : Observing system simulation experiments with advanced research wrf (arw). *Monthly Weather Review* **137**(5) : 1687–1704.
- Lorenc AC. 2003. The potential of the ensemble Kalman filter for NWP - a comparison with

- 4D-Var. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **129**(595) : 3183–3203.
- Lorenc AC, Ballard SP, Bell RS, Ingleby NB, Andrews PLF, Barker DM, Bray JR, Clayton AM, Dalby T, Li D, Payne TJ, Saunders FW. 2000. The met. office global three-dimensional variational data assimilation scheme. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **126**(570) : 2991–3012.
- Lorenz EN. 1963. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences* **20**(2) : 130–141.
- Ménétrier B, Montmerle T. 2011. Heterogeneous background-error covariances for the analysis and forecast of fog events. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **137**(661) : 2004–2013.
- Ménétrier B, Montmerle T, Berre L, Michel Y. 2014a. Estimation and diagnosis of heterogeneous flow-dependent background-error covariances at the convective scale using either large or small ensembles. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* doi : 10.1002/qj.2267.
- Ménétrier B, Montmerle T, Michel Y, Berre L. 2014b. Linear filtering of sample covariances for ensemble-based data assimilation. part i : Optimality criteria and application to variances filtering and covariances localization. *Monthly Weather Review* : submitted.
- Ménétrier B, Montmerle T, Michel Y, Berre L. 2014c. Linear filtering of sample covariances for ensemble-based data assimilation. part ii : Application to a convective-scale nwp model. *Monthly Weather Review* : submitted.
- Michel Y. 2012a. Estimating deformations of random processes for correlation modelling in a limited area model. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **139** : 534–547.
- Michel Y. 2012b. Estimating deformations of random processes for correlation modelling : methodology and the one-dimensional case. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **139** : 771–783.
- Michel Y, Auligné T, Montmerle T. 2011. Heterogeneous convective-scale background error covariances with the inclusion of hydrometeor variables. *Monthly Weather Review* **139**(9) : 2994–3015.
- Mirouze I, Weaver AT. 2010. Representation of correlation functions in variational assimilation using an implicit diffusion operator. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **136**(651) : 1421–1443.
- Montmerle T, Berre L. 2010. Diagnosis and formulation of heterogeneous background-error covariances at the mesoscale. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **136**(651) : 1408–1420.
- Montmerle T, Faccani C. 2009. Mesoscale assimilation of radial velocities from doppler radars in a preoperational framework. *Monthly Weather Review* **137**(6) : 1939–1953.
- Montmerle T, Rabier F, Fischer C. 2007. Relative impact of polar-orbiting and geostationary satellite radiances in the ALADIN/France numerical weather prediction system. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **133**(624) : 655–671.
- Muirhead RI. 2005. *Aspects of multivariate statistical theory*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- Pagé C, Fillion L, Zwack P. 2007. Diagnosing summertime mesoscale vertical motion : Implications for atmospheric data assimilation. *Monthly Weather Review* **135**(6) : 2076–2094.
- Pannekoucke O, Berre L, Desroziers G. 2008. Background-error correlation length-scale estimates and their sampling statistics. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **134**(631) : 497–508.
- Pannekoucke O, Massart S. 2008. Estimation of the local diffusion tensor and normalization for heterogeneous correlation modelling using a diffusion equation. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **134**(635) : 1425–1438.

- Parrish DF, Derber JC, Purser RJ, Wu WS, Pu ZX. 1997. The NCEP global analysis system : Recent improvements and future plans. *Journal of the Meteorological Society of Japan. Ser. II* **75**(1B) : 359–365.
- Purser RJ, Wu WS, Parrish DF, Roberts NM. 2003a. Numerical aspects of the application of recursive filters to variational statistical analysis. part I : Spatially homogeneous and isotropic gaussian covariances. *Monthly Weather Review* **131**(8) : 1524–1535.
- Purser RJ, Wu WS, Parrish DF, Roberts NM. 2003b. Numerical aspects of the application of recursive filters to variational statistical analysis. part II : Spatially inhomogeneous and anisotropic general covariances. *Monthly Weather Review* **131**(8) : 1536–1548.
- Radnoti G. 1995. Comments on "A spectral limited-area formulation with time-dependent boundary conditions applied to the shallow-water equations". *Monthly Weather Review* **123**(10) : 3122–3123.
- Raynaud L, Berre L, Desroziers G. 2008. Spatial averaging of ensemble-based background-error variances. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **134**(633) : 1003–1014.
- Raynaud L, Berre L, Desroziers G. 2009. Objective filtering of ensemble-based background-error variances. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **135**(642) : 1177–1199.
- Raynaud L, Berre L, Desroziers G. 2011. An extended specification of flow-dependent background error variances in the Météo-France global 4D-Var system. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **137**(656) : 607–619.
- Raynaud L, Berre L, Desroziers G. 2012. Accounting for model error in the Météo-France ensemble data assimilation system. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **138**(662) : 249–262.
- Raynaud L, Pannekoucke O. 2012. Sampling properties and spatial filtering of ensemble background-error length-scales. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **139** : 784–794.
- Sakov P, Oke PR. 2008. A deterministic formulation of the ensemble kalman filter : an alternative to ensemble square root filters. *Tellus A* **60**(2) : 361–371.
- Sangster WE. 1960. A method of representing the horizontal pressure force without reduction of station pressures to sea level. *Journal of Meteorology* **17**(2) : 166–176.
- Schur J. 1911. Bemerkungen zur theorie der beschränkten bilinearformen mit unendlich vielen veränderlichen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **140** : 1–28.
- Seity Y, Brousseau P, Malardel S, Hello G, Bénard P, Bouttier F, Lac C, Masson V. 2011. The AROME-france convective-scale operational model. *Monthly Weather Review* **139**(3) : 976–991.
- Sherman J, Morrison WJ. 1949. Adjustment of an inverse matrix corresponding to changes in a given column or a given row of the original matrix. *The Annals of Mathematical Statistics* **20**(4) : 620–624.
- Sherman J, Morrison WJ. 1950. Adjustment of an inverse matrix corresponding to a change in one element of a given matrix. *The Annals of Mathematical Statistics* **21**(1) : 124–127.
- Simmons AJ, Hollingsworth A. 2002. Some aspects of the improvement in skill of numerical weather prediction. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **128**(580) : 647–677.
- Stefanescu SE, Berre L, Pereira MB. 2006. The evolution of dispersion spectra and the evaluation of model differences in an ensemble estimation of error statistics for a limited-area analysis. *Monthly Weather Review* **134**(11) : 3456–3478.
- Talagrand O. 1999. A posteriori verification of analysis and assimilation algorithms. In : *ECMWF Workshop on Diagnosis of Data Assimilation Systems*. Reading, pp. 17–28.
- Talagrand O, Courtier P. 1987. Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. i : Theory. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological*

- Society* **113**(478) : 1311–1328.
- Tarantola A. 2005. *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. SIAM.
- Tippett MK, Anderson JL, Bishop CH, Hamill TM, Whitaker JS. 2003. Ensemble square root filters. *Monthly Weather Review* **131**(7) : 1485–1490.
- Trémolet Y. 2006. Accounting for an imperfect model in 4d-var. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **132**(621) : 2483–2504.
- Varella H, Berre L, Desroziers G. 2011. Diagnostic and impact studies of a wavelet formulation of background-error correlations in a global model. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **137**(658) : 1369–1379.
- Vetra-Carvalho S, Dixon M, Migliorini S, Nichols NK, Ballard SP. 2012. Breakdown of hydrostatic balance at convective scales in the forecast errors in the met office unified model. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **138**(668) : 1709–1720.
- Wang X, Barker DM, Snyder C, Hamill TM. 2008a. A hybrid ETKF-3DVAR data assimilation scheme for the WRF model. part I : Observing system simulation experiment. *Monthly Weather Review* **136**(12) : 5116–5131.
- Wang X, Barker DM, Snyder C, Hamill TM. 2008b. A hybrid ETKF-3DVAR data assimilation scheme for the WRF model. part II : Real observation experiments. *Monthly Weather Review* **136**(12) : 5132–5147.
- Wang X, Snyder C, Hamill TM. 2007. On the theoretical equivalence of differently proposed ensemble 3DVAR hybrid analysis schemes. *Monthly Weather Review* **135**(1) : 222–227.
- Wattrelot E, Caumont O, Mahfouf JF. 2014. Operational implementation of the 1D+3D-Var assimilation method of radar reflectivity data in the AROME model. *Monthly Weather Review* doi :10.1175/MWR-D-13-00230.1.
- Weaver AT, Mirouze I. 2012. On the diffusion equation and its application to isotropic and anisotropic correlation modelling in variational assimilation. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **139** : 242–260.
- Welford BP. 1962. Note on a method for calculating corrected sums of squares and products. *Technometrics* **4**(3) : 419–420.
- Whitaker JS, Hamill TM. 2002. Ensemble data assimilation without perturbed observations. *Monthly Weather Review* **130**(7) : 1913–1924.
- Whitaker JS, Hamill TM. 2012. Evaluating methods to account for system errors in ensemble data assimilation. *Monthly Weather Review* **140**(9) : 3078–3089.
- Wiener N. 1930. Generalized harmonic analysis. *Acta Mathematica* **55** : 117–258. 10.1007/BF02546511.
- Wiener N. 1949. *Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series, with engineering applications*. Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology : Cambridge.
- Wishart J. 1928. The generalised product moment distribution in samples from a normal multivariate population. *Biometrika* **20A**(1/2) : 32–52.
- Wu WS, Purser RJ, Parrish DF. 2002. Three-dimensional variational analysis with spatially inhomogeneous covariances. *Monthly Weather Review* **130**(12) : 2905–2916.
- Zupanski M. 2005. Maximum likelihood ensemble filter : Theoretical aspects. *Monthly Weather Review* **133**(6) : 1710–1726.